Мальчик Ю.Н.

НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

УДК : 62-50

Предлагается новый метод получения дифференциального уравнения, которое может быть использовано для получения передаточной функции нестационарной линейной системы.

A new method of reception of the differential equation which can be used for calculation of transfer function of time-varying linear system is offered

1. Введение

При исследовании нестационарных линейных систем (НЛС), уравнение вынужденных колебаний которых имеет вид

$$D(p,t)x = K(p,t)y, \quad p = \frac{d}{dt}, \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{1.1}$$

где

$$D(p,t) = p^n + b_1(t)p^{n-1} + \cdots + b_n(t), \tag{1.2}$$

$$K(p,t) = a_0(t)p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t), \tag{1.3}$$

часто возникает задача вычисления передаточной функции $W(s,t)$ системы. Если задача разрешима (т.е. передаточная функция существует), то она может быть решена в два этапа. На первом этапе вычисляется передаточная функция $G(s,t)$ интегрирующей части системы, процессы в которой описываются уравнением

$$D(p,t)z = y, \tag{1.4}$$

где y – входной сигнал, z – выходной сигнал. На втором этапе вычисляется передаточная функция $W(s,t)$ полной системы по формуле [1]

$$\mathrm{W(s,t)} = \sum_{j=0}^{n-1} s^j \Lambda\left[a_{n-1-j}(t)\right] * G(s,t), \tag{1.5}$$

где Λ - символ левого преобразования Лапласа[1], а знаком * обозначена операция свертки в комплексной области, определяемая равенством

$$F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(\sigma)F_2(\sigma)\,d\sigma,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha > \alpha_1$, $\operatorname{Re} s > \alpha_2$, α_1 и α_2 - соответственно показатели роста функций

$$f_1(\tau) = L_\tau^{-1}\left[F_1(s)\right], \; и \; f_2(\tau) = L_\tau^{-1}\left[F_2(s)\right].$$

Таким образом, задача вычисления передаточной функции $W(s,t)$ сводится к задаче вычисления передаточной функции интегрирующей части этой системы $G(s,t)$.

В общем случае передаточную функцию в аналитическом виде найти не удается, Поэтому на практике ищут ее аппроксимации. Согласно [1], в настоящее время известны четыре подход к решению задачи об отыскании передаточной функции системы. Один из них основан на представлении передаточной функции интегрирующей части системы как решения специального уравнения (дифференциального или разностного), получаемого с учетом специфических свойств уравнения вынужденных колебаний (применяется для систем частных видов).

В настоящей работе рассматривается этот подход для случая системы, уравнение интегрирующей части которой является уравнением с полиномиальными коэффициентами вида

---

[1] Левое преобразование Лапласа ставит в соответствие функции *f(t)* вещественной переменной *t* (определенной на интервале $(-\infty, T)$, где $T \le \infty$) функцию *F(s, t)* комплексной переменной *s* и вещественной переменной *t* с помощью соотношения

$$F(s,t) \equiv \Lambda\left[f(t)\right] = \int_{0-}^{\infty} f(t-\tau)\exp(-s\tau)\,d\tau.$$

$$b_i(t)=\sum_{j=0}^{m} B_{ij}t^j,\quad B_{ij}=const.\quad i=1,\dots,n. \tag{1.6}$$

2. Метод получения дифференциального уравнения для передаточной функции

В работе [1] Ф.А.Михайловым был предложен метод получения уравнения для передаточной функции $G(s,t)$ интегрирующей части системы с периодически изменяющимися параметрами. Этот метод применим и для систем рассматриваемого класса.

Рассмотрим применение указанного метода для системы, представленной уравнением (1.1) с коэффициентами (1.6), когда $m > n$. Уравнение вынужденных колебаний интегрирующей части системы имеет вид (1.4). Ему соответствует сопряженное уравнение

$$D^*(p,t)z=y, \tag{2.1}$$

где

$$D^*(p,t)=c_0p^n+c_1(t)p^{n-1}+\dots+c_n(t); \tag{2.2}$$

коэффициенты $c_0(t)$, … , $c_n(t)$ этого оператора определяются из тождества

$$D^*(p,t)z=(-1)^n p^n z+(-1)^{n-1}p^{n-1}(b_1z)+\dots+b_nz. \tag{2.3}$$

Согласно [2]:

$$\left.\begin{aligned} &c_0=(-1)^n;\\ &c_1=(-1)^{n-1}b_1;\\ &c_2=(-1)^{n-2}b_2+(-1)^{n-1}(n-1)b_1;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &c_n=b_n+b'_{n-1}+b''_{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}b_1^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Согласно [3] при $y=\delta(t-\tau)$ уравнение (2.1) имеет решение

$$z(t)=g^*(t,u)=\begin{cases} g^*(t,u) & при\ t<u,\\ 0 & при\ t>u.\end{cases} \tag{2.5}$$

Введя новую переменную $\tau^*=u-t$ и учтя (2.5), запишем (2.1) в виде

$$D^*(p,u-\tau^*)g^*(u-\tau^*,u)=\delta(-\tau^*).$$

Применив к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа по переменной τ^* и учтя (2.2), получим

$$\begin{aligned} &L_{\tau^*}\left[c_0(u-\tau^*)\frac{\partial^n g^*(u-\tau^*,u)}{\partial(u-\tau^*)^n}\right]+L_{\tau^*}\left[c_1(u-\tau^*)\frac{\partial^{n-1} g^*(u-\tau^*,u)}{\partial(u-\tau^*)^{n-1}}\right]+\cdots\\ &\quad+L_{\tau^*}\left[c_n(u-\tau^*)g^*(u-\tau^*,u)\right]=1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Обозначив

$$L_{\tau^*}\left[g^*(u-\tau^*,u\right]=G^*(s,u),$$

с учетом (2.4) и свойств преобразования Лапласа (см. Приложение), имеем:

$$\begin{aligned} &L_{\tau^*}\left[c_0(u-\tau^*)\frac{\partial^n g^*(u-\tau^*,u)}{\partial(u-\tau^*)^n}\right]=s^nG^*(s,u);\\ &L_{\tau^*}\left[c_1(u-\tau^*)\frac{\partial^{n-1} g^*(u-\tau^*,u)}{\partial(u-\tau^*)^{n-1}}\right]=(-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^lc_1}{du^l}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[s^{n-1}G^*(s,u)\right];\\ &.\ .\\ &L_{\tau^*}\left[c_n(u-\tau^*)g^*(u-\tau^*,u)\right]=\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^lc_1}{du^l}\frac{\partial^lG^*(s,u)}{\partial s^l}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) уравнение (2.6) можно записать в виде

$$s^nG^*(s,u)+(-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^lc_1}{du^l}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[s^{n-1}G^*(s,u)\right]+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^lc_1}{du^l}\frac{\partial^lG^*(s,u)}{\partial s^l}=1. \tag{2.8}$$

Расписав суммы в левой части уравнения (2.8) и объединив нулевые, первые вторые и т.д. члены этих сумм, уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\Big[s^n+(-1)^{n-1}c_1(u)s^{n-1}+\cdots+c_n(u)\Big]G^*(s,u)+\Big\{\Big[(-1)^{n-1}c_1^{'}(u)s^{n-1}+\cdots+c_n^{'}(u)\Big]$$
$$\frac{\partial G^*(s,u)}{\partial s}+\Big[(n-1)c_1^{'}(u)s^{n-2}+\cdots+c_n^{'}(u)\Big]G^*(s,u)\Big\}+\frac{1}{2!}\Big\{\Big[(-1)^{n-1}(n-1)c_1^{''}(u)s^{n-2}+$$
$$\cdots+c_n^{''}(u)\Big]\frac{\partial^2 G^*(s,u)}{\partial s^2}+\binom{2}{1}\Big[(-1)^{n-1}(n-1)c_1^{''}(u)s^{n-2}+\cdots+c_n^{''}(u)\Big]\frac{\partial G^*(s,u)}{\partial s}+$$
$$\binom{2}{2}\Big[(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)c_1^{''}(u)s^{n-3}+\cdots+2c_{n-2}^{''}(u)\Big]G^*(s,u)\Big\}+\cdots+\frac{1}{m!}\Big\{\Big[(-1)^{n-1} \tag{2.9}$$
$$c_1^{(m)}(u)s^{n-1}+\cdots+c_n^{(m)}(u)\Big]\frac{\partial^m G^*(s,u)}{\partial s}+\binom{m}{1}\Big[(-1)^{n-1}(n-1)c_1^{(m)}(u)s^{n-2}+\cdots+c_{n-1}^{(m)}(u)\Big]$$
$$\frac{\partial^{m-1}G^*(s,u)}{\partial s^{m-1}}+\binom{m}{2}\Big[(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)c_1^{(m)}(u)s^{n-3}+\cdots+2c_{n-1}^{(m)}(u)\Big]\frac{\partial^{m-2}G^*(s,u)}{\partial s^{m-2}}$$
$$+\cdots+\binom{m}{n-1}\Big[(-1)^{n-1}(n-1)!\,c_1^{(m)}\Big]\frac{\partial^{m-n+1}G^*(s,u)}{\partial s^{m-n+1}}\Big\}=1.$$

Но так как согласно (2.2)

$$D^*(-s,u)=s^n+(-1)^{n-1}c_1(u)s^{n-1}+\cdots+c_n(u),$$

то уравнение (2.9) можно записать в виде

$$D^*G^*+\left\{\frac{\partial D^*}{\partial u}\frac{\partial G^*}{\partial s}+\left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial D^*}{\partial u}\right]G^*\right\}+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 D^*}{\partial u^2}\frac{\partial^2 G^*}{\partial s^2}+\binom{2}{1}\left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 D^*}{\partial u^2}\right]\frac{\partial G^*}{\partial s}+\right.$$
$$\left.\binom{2}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial^2 D^*}{\partial u^2}\right]G^*\right\}+\cdots+\frac{1}{m!}\left\{\frac{\partial^m D^*}{\partial u^m}\frac{\partial^m G^*}{\partial s^m}+\binom{m}{1}\left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^m D^*}{\partial u^m}\right]\frac{\partial^{m-1}G^*}{\partial s^{m-1}}+\cdots+\right. \tag{2.10}$$
$$\left.\binom{m}{n-1}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\frac{\partial^m D^*}{\partial u^m}\right]\frac{\partial^{m-n+1}G^*}{\partial s^{m-n+1}}\right\}=1,$$

или, в компактной форме,

$$\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[G^*(s,u)\frac{\partial^l}{\partial u^l}D^*(-s,u)\right]=1. \tag{2.11}$$

Согласно [1, с. 134]

$$G^*(s,u)\equiv L_{\tau^*}\Big[g^*\big(u-\tau^*,u\big)\Big]=L_{\tau^*}\Big[g\big(u,u-\tau^*\big)\Big]\equiv G(s,u).$$

Тогда, изменив в уравнении (1.11) обозначение u на t, получим уравнение

$$\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[G(s,t)\frac{\partial^l}{\partial u^l}D^*(-s,t)\right]=1, \tag{2.12}$$

которому удовлетворяет передаточная функция $G(s,t)$.

Уравнение (2.12) есть известное уравнение, полученное Ш. Бланом [4]. Таким образом, изложенный метод получения дифференциального уравнения для $G(s,t)$ привел нас к известному результату. Однако примененный метод проще метода, предложенного Бланом.

3. Заключение

Для уравнения (1.4) с коэффициентами (1.6) предложен новый более простой метод получения уравнения Блана.

Приложение

Рассмотрим функцию

$$g^*(u-\tau,u)=\begin{cases} g(u-\tau,u) & \text{при } \tau>0,\\ 0 & \text{при } \tau<0.\end{cases} \tag{1}$$

Пусть

$$L_\tau\Big[g^*\big(u-\tau,u\big)\Big]\equiv\int_{0-}^{\infty}g^*\big(u-\tau,u\big)\exp(-s\tau)d\tau\equiv G^*(s,u). \tag{2}$$

В дальнейшем полагаем, что все изображения, указанные при определении свойств преобразования Лапласа, существуют.

Лемма 1. Если

$$\varphi(u-\tau)=\frac{\partial^k g^*(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^k},$$

то

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=(-1)^k s^k G^*(s,u). \tag{3}$$

Лемма доказана в [5].

Лемма 2. Если

$$\varphi(u-\tau)=(u-\tau)^m g^*(u-\tau,u),$$

то

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}u^{m-j}\frac{\partial^j G^*(s,u)}{\partial s^j}. \tag{4}$$

Лемма доказана в [5].

Лемма 3. Если

$$\varphi(u-\tau)=(u-\tau)^m\frac{\partial^k g^*(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^k},$$

то

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}u^{m-j}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[(-1)^k s^k G^*(s,u)\right]. \tag{5}$$

Доказательство, пусть

$$f(u-\tau)=\frac{\partial^k g^*(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^k}$$

и

$$L_\tau[f(u-\tau)]=F(s,u)=(-1)^k s^k G^*(s,u). \tag{6}$$

Тогда согласно лемме 2 имеем

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}u^{m-j}\frac{\partial^j F(s,u)}{\partial s^j}.$$

С учетом (6) получим окончательно

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}u^{m-j}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[(-1)^k s^k G^*(s,u)\right].$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если

$$\varphi(u-\tau)=\sum_{j=0}^{m}B_{ij}(u-\tau)^j\frac{\partial^k g^*(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^k},$$

то

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^l b_i}{du^l}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[(-1)^k s^k G^*(s,u)\right], \tag{7}$$

где $$b_i=\sum_{j=0}^{m}B_{ij}u^j.$$

Действительно, согласно свойства линейности изображения и лемме 3 имеем

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}B_{ij}L_\tau\left[(u-\tau)^j\frac{\partial^k g^*(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^k}\right]=$$

$$\sum_{j=0}^{m}B_{ij}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}u^{j-l}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\left[(-1)^k s^k G^*(s,u)\right].$$

Отсюда следует

$$L_\tau[\varphi(u-\tau)]=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{l!}\frac{d^l b_i}{du^l}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[(-1)^k s^k G^*(s,u)\right].$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Если

$$\varphi(u-\tau)=\sum_{j=1}^{m} jB_{i\,j}\,(u-\tau)^{j}\,\frac{\partial^{k} g^{*}(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^{k}},$$

то

$$L_{\tau}\left[\varphi(u-\tau)\right]=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l}b_{i}'}{du^{l}}\,\frac{\partial^{l}}{\partial s^{l}}\left[(-1)^{k}s^{k}G^{*}(s,u)\right], \qquad (8)$$

где $\quad b_{i}'(u)\equiv\dfrac{db_{i}}{du}=\sum\limits_{j=1}^{m} jB_{i\,j}u^{j-1}.$

Действительно, согласно свойства линейности изображения и лемме 3 имеем

$$L_{\tau}\left[\varphi(u-\tau)\right]=\sum_{j=1}^{m} jB_{ij}L_{\tau}\left[(u-\tau)^{j-1}\,\frac{\partial^{k} g^{*}(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^{k}}\right]=$$

$$\sum_{j=0}^{m} jB_{i\,j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j-1}{l}u^{j-1-l}\,\frac{\partial^{l}}{\partial s^{l}}\left[(-1)^{k}s^{k}G^{*}(s,u)\right].$$

Отсюда следует

$$L_{\tau}\left[\varphi(u-\tau)\right]=\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(l-1)!}\,\frac{d^{l}b_{i}'}{du^{l}}\,\frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\left[(-1)^{k}s^{k}G^{*}(s,u)\right].$$

Или окончательно

$$L_{\tau}\left[\varphi(u-\tau)\right]=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l}b_{i}'}{du^{l}}\,\frac{\partial^{l}}{\partial s^{l}}\left[(-1)^{k}s^{k}G^{*}(s,u)\right].$$

Лемма доказана.

Аналогично, если

$$\varphi(u-\tau)=\sum_{j=k}^{m} j(j-1)\cdots(j-k+1)B_{i\,j}\,(u-\tau)^{j-k}\,\frac{\partial^{k} g^{*}(u-\tau,u)}{\partial(u-\tau)^{k}},$$

то

$$L_{\tau}\left[\varphi(u-\tau)\right]=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l}b_{i}^{(k)}}{du^{l}}\,\frac{\partial^{l}}{\partial s^{l}}\left[(-1)^{k}s^{k}G^{*}(s,u)\right],$$

где

$$b_{i}^{(k)}(u)\equiv\frac{d^{k}b_{i}}{du^{k}}=\sum_{j=k}^{m} j(j-1)\cdots(j-k+1)B_{i\,j}u^{j-1}.$$

Литература:

1. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем. М.: Машиностроение, 1977, 296 с.
2. Михайлов Ф.А., Мальчик Ю.Н. Сравнение уравнений Блана и Рудницкого для передаточной функции нестационарной линейной системы. – В сб. «Электроника и автоматика», труды УАИ, вып. 9, 1984.
3. Солодовников А.В., Петров Ф.С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М.: Наука, 1974, 329 с.
4. Blank Ch. Sur les equation differentielles lineaires a coefficients lente-
1. ment variable, Bull. Technique de la suisse romande, 1948, N15, 74, p. 182 –189.
5. Михайлов Ф.А., Теряев Е. Д., Булеков В.П. и др. Динамика нестационарных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами. М.: Наука, 1971, 561 с.