Рыскелдиева Н.Б., Уралиев А.А.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОДТОПЛЕНИЯ

УДК: 532.546

В работе рассматривается проблема моделирования процесса подтопления. С использованием аппарата группового анализа дифференциальных уравнений показано взаимодействия процессов передвижения влаги и фильтрации грунтовых вод.

Введение

Кыргызстан обладает значительными ресурсами подземных и наземных вод, запасы которых находятся в реках, вечных ледниках и снежных массивах. В настоящее время на значительной территории Республики прогрессирует процесс подъема уровня грунтовых вод, который ведет к подтоплению значительных территорий городов, населенных пунктов, промышленных и других зон. При этом с каждым годом наблюдается увеличение количества подтопленных участков. Подтопление территорий вследствие высокого стояния уровня грунтовых вод является одним из самых распространенных опасных процессов на территории Кыргызстана.

По прогнозам МЧС (Министерство чрезвычайных ситуаций) в 2007 году подтоплению подвержены территории Чуйской области, где оно развито на площади около 1700 км^2. В Иссык-Кульской области подтопление развито на площади около 600 км^2, а в Таласской области 200 км^2. Общая площадь подтопленных территорий в Нарынской области составляет около 450 км^2, в Джалал-Абадской 50 км^2, в Ошской 150 км^2 и в Баткенской области подтоплено 50 км^2.

На подтопленных территориях в пределах населенных пунктов происходит деформация и разрушение жилых домов, зданий, сооружений, инженерных коммуникаций, повышается сейсмическая опасность. На сельхозугодиях происходит деградация земель в виде заболачивания и засоления. В связи с этим все более актуальным становится решение проблемы оценки, прогнозирования и управления процессом опасного подъема уровня грунтовых вод. Откуда вытекает необходимость проведения исследований процессов, связанных с прогнозированием подъема уровня грунтовых вод, приводящих к подтоплению важных гидротехнических, народнохозяйственных и др. объектов и ухудшающих их экологических состояний.

1. Об одной математической модели процесса подтопления

Наибольшее распространение при решении прогноза подтопления получили методы математического моделирования. Математическая модель процесса подтопления в двумерной постановке описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial(\theta\gamma)}{\partial t}+\frac{\partial(u\gamma)}{\partial x}+\frac{\partial(w\gamma)}{\partial z}=F, \tag{1}$$

$$u=-\frac{k_k}{\gamma}\frac{\partial p_k}{\partial x},\quad w=-\frac{k_k}{\gamma}\left[\frac{\partial p_k}{\partial z}-\gamma\right], \tag{2}$$

$$\overset{1}{u}_x+\overset{2}{u}_z=\Phi, \tag{3}$$

$$\overset{1}{u}=-kh_x,\quad \overset{2}{u}=-kh_z, \tag{4}$$

с соответствующими начально-краевыми условиями.

Здесь в (1)–(4) $\gamma=\rho g$ – объемная масса влаги, $[ML^{-2}T^{-2}]$; ρ – плотность влаги, $[ML^{-3}]$; g – ускорение силы тяжести, $[LT^{-2}]$; (x,z) – декартовы координаты точек; z – вертикальная ось, направленная вниз, при значениях $z\in[0,L]$, [L]; t – время, при этом $0\le t\le T$, [T]; θ – объемная влажность грунта, безразмерная величина; k_k – коэффициент влагопроводимости, $[LT^{-1}]$; p_k – капиллярное давление, $[ML^{-1}T^{-2}]$; $v=(u,w)$ – вектор скорости влаги, $[LT^{-1}]$; F=F(t,x,z) – функция, определяющая разность между площадной инфильтрацией, испарением и др. возмущающими факторами, $[ML^{-2}T^{-3}]$; h – функция напора, [L]; Φ=Φ(t,x,z) – функция, определяющая разность между площадной инфильтрацией, испарением и др. возмущающими факторами, но при этом время t в ней участвует в виде параметра, $[T^{-1}]$; k=k(x,z) – неизвестный коэффициент фильтрации, $[LT^{-1}]$; $\vec{u}=(\overset{1}{u},\overset{2}{u})$ – вектор плотности потока, $[LT^{-1}]$.

В системе уравнений (1),(2) неизвестными переменными являются u, w, θ, k_k, p_k, γ, F, а количество уравнений равно трем, поэтому произвольных функций должно быть четыре.

Предположим, что объемная масса влаги γ и капиллярное давление p_k явные функции только от объемной влажности θ, т.е.

$$\gamma=\gamma(\theta),\ p_k=p_k(\theta).$$

Для удобства вычислений переобозначим систему (1) и (2):

$$\overset{1}{v}=u\gamma(\theta),\quad \overset{2}{v}=w\gamma(\theta), \tag{5}$$

$$\overset{0}{\theta} = \theta\gamma(\theta), \tag{6}$$

$$f = -k_k \frac{dp_k}{d\theta}\frac{d\theta}{d\overset{0}{\theta}}, \quad \widetilde{k} = k_k\gamma(\theta). \tag{7}$$

В силу этих обозначений система (1) и (2) принимает вид

$$\overset{0}{\theta}_t + \overset{1}{v}_x + \overset{2}{v}_z = F, \tag{8}$$

$$\overset{1}{v} = f\,\overset{0}{\theta}_x, \quad \overset{2}{v} = f\,\overset{0}{\theta}_z + \widetilde{k}. \tag{9}$$

Из системы (8) и (9) видно, что количество неизвестных функций уменьшилось на единицу. Примем одну из семи переменных известной, т.е. положим, что

$$\gamma=\gamma(\theta) \tag{10}$$

– известная функция. В самом деле, она и должна задаваться с помощью данных измерений или эксперимента.

Итак, объектом дальнейших исследований будет система уравнений:

$$\overset{0}{\theta}_t + \overset{1}{v}_x + \overset{2}{v}_z = F, \tag{11}$$

$$\overset{1}{v} = f\,\overset{0}{\theta}_x, \quad \overset{2}{v} = f\,\overset{0}{\theta}_z + \widetilde{k}, \tag{12}$$

$$\overset{1}{u}_x + \overset{2}{u}_z = \Phi, \tag{13}$$

$$\overset{1}{u} = -kh_x, \quad \overset{2}{u} = -kh_z. \tag{14}$$

2. Использование группового анализа дифференциальных уравнений к изучаемой модели.

Главная трудность в системе (11)–(14) заключена в ее недоопределенности, означающей, что количество уравнений меньше чем количество неизвестных. Применение аппарата группового анализа дифференциальных уравнений избавляет нас от этой трудности. С помощью данного аппарата недоопределенная и некорректно сформулированная модель процесса преобразуется в корректно поставленную систему уравнений, инвариантную к первоначальной модели.

Применяем аппарат группового анализа к системе (11)–(14) [1]. Инфинитезимальным оператором этой системы будет

$$X = \overset{0}{\xi}\frac{\partial}{\partial t} + \overset{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \overset{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial z} + \eta\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\theta}} + \overset{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} + \overset{2}{\eta}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}} + \overset{0}{g}\frac{\partial}{\partial h} + \overset{1}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{u}} + \overset{2}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{u}}, \tag{15}$$

где $\overset{0}{\xi}, \overset{1}{\xi}, ..., \overset{2}{g}$ – координаты инфинитезимального оператора X, и они зависят только от $t, x, z, \overset{0}{\theta}, \overset{1}{v}, \overset{2}{v}, h, \overset{1}{u}, \overset{2}{u}$.

Первым продолжением оператора X является

$$\overset{1}{X} = X + \overset{0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\theta}_t} + \overset{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\theta}_x} + \overset{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \overset{0}{\theta}_z} + \overset{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}_x} + \overset{2}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}_z} + \overset{1}{\varsigma}\frac{\partial}{\partial h_x} + \overset{2}{\varsigma}\frac{\partial}{\partial h_z} + \overset{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{u}_x} + \overset{2}{\mu}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{u}_z}, \tag{16}$$

Способ определения $\overset{0}{\sigma}, \overset{1}{\sigma}, ..., \overset{2}{\mu}$ и техника группового анализа подробно изложено в работе [2]. После применения аппарата группового анализа будут получены следующие определяющие уравнения:

$$\eta_{\overset{0}{\theta}\overset{0}{\theta}} = 0, \tag{17}$$

$$-\frac{\overset{1}{\xi}_t}{f} + \eta_{x\overset{0}{\theta}} + 2\overset{1}{\xi}_{xx} + \overset{2}{\xi}_x\frac{k_{\overset{0}{\theta}}}{f} + \eta_{x\overset{0}{\theta}} + \eta_x\frac{f_{\overset{0}{\theta}}}{f} = 0, \tag{18}$$

$$-\frac{\overset{2}{\xi}_t}{f} + \eta_{z\overset{0}{\theta}} + 2\overset{2}{\xi}_{zz} - \left(\eta_{\overset{0}{\theta}} + \overset{2}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t\right)\frac{k_{\overset{0}{\theta}}}{f} + \eta_{z\overset{0}{\theta}} + \eta_z\frac{f_{\overset{0}{\theta}}}{f} + \frac{(Xk)_{\overset{0}{\theta}}}{f} = 0, \tag{19}$$

$$\eta_t + \left(\eta_{\overset{0}{\theta}} - \overset{0}{\xi}_t\right)F + \overset{2}{\xi}_x k_x - \left(\eta_{\overset{0}{\theta}} + \overset{1}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t\right)k_z + (f\eta_x)_x + (f\eta_z)_z + (Xk)_z = XF, \tag{20}$$

$$\overset{0}{g}_{hh} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{Xk}{k} + 2\overset{0}{g}_h = \widetilde{c}(t), \tag{22}$$

$$\left(\widetilde{c}(t) - \overset{0}{g}_h - 2\overset{1}{\xi}_x\right)\Phi - \left(k\,\overset{0}{g}_x\right)_x - \left(k\,\overset{0}{g}_z\right)_z = X\Phi. \tag{23}$$

где $\tilde{c}(t)$ – произвольная функция, зависящая только от t.

При этом коэффициент влагопроводимости k_k, согласно С.Ф. Аверьянову [3] представляется в виде

$$k_k=k\psi(\theta). \tag{24}$$

Здесь k=k(x,z) коэффициент фильтрации при полном насыщении грунта, причем известно, что функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(\sigma)=1 \;\text{ и }\; \psi(\omega)=0, \tag{25}$$

где σ - пористость почвогрунта, ω - количество связанной воды в долях от общего объема грунта. Первое равенство из (25) означает, что почвогрунт полностью насыщен. Следовательно, из (24) вытекает, что при $\psi=1$ коэффициент влагопроводимости совпадает с коэффициентом фильтрации грунта. Второе равенство из (25) означает, что в почвогрунте отсутствует передвижение влаги, которое имеет место при

$$k_k=0.$$

Тогда в силу (24) из (6) и (7) имеем

$$f=k(x,z)m(\overset{0}{\theta}), \qquad \tilde{k}=k(x,z)n(\overset{0}{\theta}), \tag{26}$$

где

$$m(\overset{0}{\theta})=-\psi(\theta)\frac{dp_k}{d\theta}\frac{d\theta}{d\overset{0}{\theta}}\bigg|_{\theta=\nu(\overset{0}{\theta})}, \qquad n(\overset{0}{\theta})=\psi(\theta)\gamma(\theta)\big|_{\theta=\nu(\overset{0}{\theta})}. \tag{27}$$

Здесь функция $\nu(\overset{0}{\theta})$ – обратная функция к (6), т.е.

$$\overset{0}{\theta}\equiv\nu(\overset{0}{\theta})\gamma\left(\nu(\overset{0}{\theta})\right).$$

В силу (26) уравнения (18)–(20) принимают следующий вид:

$$2\eta_{x\overset{0}{\theta}}+4\overset{1}{\xi}_{xx}-\left(\frac{Xk}{k}\right)_x-\frac{\overset{1}{\xi}_t}{k}\frac{1}{m}+\overset{2}{\xi}_x\frac{n'}{m}=0,$$

$$2\eta_{z\overset{0}{\theta}}+4\overset{2}{\xi}_{zz}-\left(\frac{Xk}{k}\right)_z-\frac{\overset{2}{\xi}_t}{k}\frac{1}{m}+\left(\frac{Xk}{k}-\overset{2}{\xi}_z+\overset{0}{\xi}_t\right)\frac{n'}{m}+\eta\frac{n''}{m}=0, \tag{28}$$

$$\eta_t+(\eta_{\overset{0}{\theta}}-\overset{0}{\xi}_t)F+\left[\overset{2}{\xi}_x k_x-(\eta_{\overset{0}{\theta}}+\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t)k_z+(Xk)_z\right]n+(k\eta)_z n'+\left[(k\eta_x)_x+(k\eta_z)_z\right]m=XF. \tag{29}$$

В работе [2] подробно показано способы определения произвольных функций $m(\overset{0}{\theta})$, $n(\overset{0}{\theta})$. В данном случае рассмотрены четыре возможные случаи относительно функции $m(\overset{0}{\theta})$. Для краткости записи представим их в виде таблицы 1.

Таблица содержит произвольных функций $m(\overset{0}{\theta})$, $n(\overset{0}{\theta})$, а также представлены значения коэффициента влагопроводимости и функций F и Ф. В восьмом и девятом столбцах указанной таблицы приведены преобразования и соответствующая преобразованная система, полученная после применения группового анализа дифференциальных уравнений к системе (11)–(14).

В преобразованных системах имеются произвольные функции $\bar{k}(\eta)$, $\bar{F}(\xi,\eta)$, $\bar{\Phi}(\xi,\eta)$ и произвольные постоянные α, δ, c, $\tilde{\tilde{c}}$. Используя полученные от моделируемого объекта экспериментальные и/или наблюденные данные, определяются эти произвольные функции и постоянные. После определения входящих произвольных постоянных и произвольных функций, далее следует организовать начально-краевые условия, необходимые для построения и приближенного решения.

Литература:

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1978. –400с.
2. Рыскелдиева Н.Б., Уралиев А.А. Математическое моделирование переноса влаги в ненасыщенной среде и фильтрации подземных вод в двумерной постановке. //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006, N35 –С. 222-228.
3. Аверьянов С.В. Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха. –ДАН СССР, 1949, т. 69, №2, с. 141–145.