Джансеркеев А.Б., Керимкулова Г.К.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

УДК: 532.546

В данной статье рассматривается недоопределенная одномерная математическая модель процесса фильтрации. С применением аппарата группового анализа дифференциальных уравнений первоначальная модель преобразуется вполне определенную корректно поставленную систему уравнений.

В современном мире экологические проблемы по своей общественной значимости вышли на одно из первых мест. В связи с урбанизацией и интенсивным развитием техногенных воздействий на экологическое состояние окружающей среды возникают серьезные проблемы, требующие более рационального и рачительного использования природных ресурсов, в том числе и водных ресурсов суши. Рациональное использование пресных подземных вод и охрана их от загрязнения невозможны без глубокого изучения динамики подземных вод с учетом влияния действия различных естественных и техногенных факторов. В последнее время из-за нехватки пресной воды для удовлетворения нужд промышленности, водоснабжения населенных пунктов и орошения земель используются все больше подземные воды. Нехватка водных ресурсов ощущается почти во всех районах Кыргызской Республики. Как известно, эксплуатация подземных вод без учета их запаса и естественной восполняемости может привести к истощению месторождений подземных вод (МПВ). Поэтому возникает необходимость изучения динамики подземных вод и получения объективных данных о фильтрационных характеристиках среды. Знание движения и качества подземных вод дает возможность решать многие народнохозяйственные проблемы, например, связанные с мелиорацией, орошением засушливых земель, осушением заболоченных территорий и др.

Рассмотрим одномерное вертикальное течение подземных вод в неоднородной пористой среде. Математическая модель процесса описывается уравнением неразрывности [1]

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=F \tag{1}$$

и динамическими уравнениями

$$u=-k\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{2}$$

которое называет обобщенным законом Дарси [2].

Здесь, x – ось, направленная вертикально вниз, [м]; t – время, [сек]; h=$h(t,x)$ – искомая гидравлическая функция напора, [м]; k=k(h,x) – неизвестный коэффициент фильтрации, $k\neq 0$, [м/сек]; $\mu=\mu(x)$ – неизвестная удельная влагоемкость (или в отношении инфильтрации влагопроводность), [1/м]; $F=F(t,x)$ – неизвестная интенсивность источников (и стоков), [1/сек]; $u=u(t,x)$ – искомая плотность потока, [м/сек].

Неизвестный коэффициент фильтрации k ищем предложенный С.Д.Аверьяновым [2] виде:

$$k=\varphi(x)\,\alpha(h). \tag{3}$$

В практике заданные точечные значения коэффициента фильтрации малочисленны, так как они получаются в результате дорогих опытно-фильтрационных работ. Рассматриваемая математическая модель недоопределена из-за того, что коэффициент фильтрации и функция источников неизвестны. В этой работе покажем, что с помощью аппарата группового анализа [3] как определяются структуры этих неизвестных функций. Систему (1), (2) можем писать:

$$h_t=\frac{F-u_x}{\mu}, \tag{4}$$

$$h_x=-\frac{u}{k}. \tag{5}$$

Применим групповой анализ дифференциальных уравнений к системе (1), (2). Для систем (1), (2) считаем, что:

1) t,x – независимые переменные;
2) h, u – искомые функции;
3) F, φ, α, μ – произвольные функции от своих аргументов.

Инфинитезимальным оператором будет следующий оператор:

$$X=\overset{0}{\xi}\frac{\partial}{\partial t}+\overset{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}+\overset{0}{g}\frac{\partial}{\partial h}+\overset{1}{g}\frac{\partial}{\partial u}, \tag{6}$$

а первым продолжением оператора X будет:

$$\overset{1}{X}=X+\overset{0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial h_t}+\overset{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial h_x}+\overset{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u_x}. \tag{7}$$

Следует отметить, что в операторе X координаты $\overset{0}{\xi},\overset{1}{\xi},\overset{0}{g},\overset{1}{g}$ являются неизвестными функциями от $t,x,h,u.$ Координаты оператора $\overset{1}{X}$: $\overset{0}{\sigma},\ \overset{1}{\sigma},\ \overset{1}{\mu}$ вычисляются специальными формулами, которые подробно рассмотрены в [3], [4].

Воздействуя оператором X на систему (1), (2) и подставляя значения $\overset{0}{\sigma},\ \overset{1}{\sigma},\ \overset{1}{\mu}$, получим:

$$\mu\left[\overset{0}{g}_t+h_t\left(\overset{0}{g}_h-\overset{0}{\xi}_t-\overset{0}{\xi}_h h_t-\overset{0}{\xi}_u u_t\right)+\overset{0}{g}_u u_t-h_x\left(\overset{1}{\xi}_t+\overset{1}{\xi}_h h_t+\overset{1}{\xi}_u u_t\right)\right]+h_t X\mu+$$
$$+\overset{1}{g}_x+\overset{1}{g}_h h_x+\overset{1}{g}_u u_x-u_t\left(\overset{0}{\xi}_x+\overset{0}{\xi}_h h_x+\overset{0}{\xi}_u u_x\right)-u_x\left(\overset{1}{\xi}_x+\overset{1}{\xi}_h h_x+\overset{1}{\xi}_u u_x\right)=XF, \tag{8}$$

$$\overset{1}{g}=-k\left[\overset{0}{g}_x+\overset{0}{g}_h h_x+\overset{0}{g}_u u_x-h_t\left(\overset{0}{\xi}_x+\overset{0}{\xi}_h h_x+\overset{0}{\xi}_u u_x\right)-h_x\left(\overset{1}{\xi}_x+\overset{1}{\xi}_h h_x+\overset{1}{\xi}_u u_x\right)\right]-h_x Xk. \tag{9}$$

Сначала следует определить всевозможные производные первого порядка от искомых функций h,u по независимым переменным t,x и решить, какие из них брать в качестве «зависимых», какие «свободных». Из системы уравнений (4), (5) видно, что переменные h_t, h_x можно брать в качестве «зависимых». Тогда остальные частные производные являются свободными. Равенства (4), (5) подставляя в (8), (9) и далее расщепляя по «свободным» параметрам, после необходимых вычислений получаем следующие определяющие уравнения:

$$\frac{Xk}{k}=\frac{X\mu}{\mu}+2\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t. \tag{10}$$

$$\overset{1}{g}=\left(\overset{0}{g}_h+\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t+\frac{X\mu}{\mu}\right)u-k\overset{0}{g}_x. \tag{11}$$

$$\overset{0}{g}_{hh}=0, \tag{12}$$

$$\left(\overset{0}{g}_h-\overset{0}{\xi}_t+\frac{X\mu}{\mu}\right)F+\mu\overset{0}{g}_t-\left(k\overset{0}{g}_x\right)_x=XF. \tag{13}$$

$$\left(\frac{X\mu}{\mu}\right)_x+\frac{\mu}{k}\overset{1}{\xi}_t+\overset{1}{\xi}_{xx}+2\overset{0}{g}_{xh}+\frac{\alpha'(h)}{\alpha(h)}\overset{0}{g}_x=0. \tag{14}$$

$$\overset{0}{g}\frac{\alpha'(h)}{\alpha(h)}+\overset{1}{\xi}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\overset{1}{\xi}\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}+2\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t. \tag{15}$$

Надо рассмотреть следующие случаи:

I.

$$\alpha'(h)\neq 0; \tag{16}$$

II.

$$\alpha'(h)=0. \tag{17}$$

I. В этом случае из (15) имеем:

$$\overset{0}{g}=\left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)+2\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t\right]\frac{\alpha(h)}{\alpha'(h)}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (12), получим уравнение:

$$\left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)+2\overset{1}{\xi}_x-\overset{0}{\xi}_t\right]\left(\frac{\alpha(h)}{\alpha'(h)}\right)_{hh}=0. \tag{19}$$

Рассмотрим случаи:

А.

$$\left(\frac{\alpha(h)}{\alpha'(h)}\right)_{hh} = 0; \tag{20}$$

В.

$$\left(\frac{\alpha(h)}{\alpha'(h)}\right)_{hh} \neq 0. \tag{21}$$

А. Решаем уравнение (20):

$$\alpha(h) = \begin{cases} \tilde{c}(ah+b)^{\frac{1}{a}}, & \text{если } a \neq 0, \\ \tilde{c}e^{\frac{h}{b}}, & \text{если } a = 0. \end{cases} \tag{22}$$

где $\tilde{c}$ – некоторое не нулевое постоянное, причем $|a| + |b| \neq 0$.

A_1. Пусть $a \neq 0$, т.е.

$$\alpha(h) = \tilde{c}(ah+b)^{\frac{1}{a}}. \tag{23}$$

Учитывая (23) из (38) имеем

$$\overset{0}{g} = \left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) + 2\overset{1}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t\right](ah+b). \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в (34) и расщепляя по h, получим:

$$\overset{1}{\xi}_t = 0, \quad \left(\overset{1}{\xi}\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right)_x + \overset{1}{\xi}_{xx} + a\left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) + 2\overset{1}{\xi}_x\right]_x + \left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) + 2\overset{1}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t\right]_x = 0$$

или

$$\overset{1}{\xi}_t = 0, \quad (2a+2)\left(\overset{1}{\xi}\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right)_x - (2a+1)\left(\overset{1}{\xi}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)_x + (2a+3)\overset{1}{\xi}_{xx} = 0. \tag{25}$$

Подставляем (23) и (24) в (33). При этом учитывая (25), расщепляем его по h

$$\overset{0}{\xi}_{tt} = 0, \quad \left\{a\left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) + 2\overset{1}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t\right] - \overset{0}{\xi}_t + \frac{X\mu}{\mu}\right\}F = XF,$$

$$\left\{\varphi(x)\left[\overset{1}{\xi}\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) + 2\overset{1}{\xi}_x\right]_x\right\}_x = 0. \tag{26}$$

Положим, что

$$\overset{0}{\xi} = \gamma t, \quad \overset{1}{\xi} = x. \tag{27}$$

Далее интегрируя второе уравнение системы (25) по x, имеем:

$$(2a+2)x\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - (2a+1)x\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \bar{c}. \tag{28}$$

где $\bar{c}$ – некоторое постоянное число.

Здесь мы должны рассмотреть следующие случаи:

а) $2a+2=0;$ (29)

б) $2a+2\neq 0.$ (30)

Пусть выполняется (29), тогда учитывая (29) из (28) имеем:

$$x\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \bar{c}$$

и решениями этого уравнения является

$$\varphi(x) = \bar{\bar{c}}x^{\bar{c}}, \tag{31}$$

где $\bar{c}, \bar{\bar{c}}$ – произвольные постоянные, причем $\bar{\bar{c}} \neq 0$.

Далее учитывая (27), (31) положив в третье уравнение (26) имеем:

$$\left\{\bar{\bar{c}}x^{\bar{c}}\left[x\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}-\frac{\bar{c}}{x}\right)+2\right]_x\right\}_x=0,$$

решив уравнение получим:

$$\mu(x)=\begin{cases}\hat{\hat{\hat{c}}}x^{\hat{c}}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}, & \text{если}\quad \bar{c}\neq 1,\\ \hat{\hat{\hat{c}}}e^{\hat{c}\ln^2 x+\hat{c}\ln x}, & \text{если}\quad \bar{c}=1.\end{cases}\tag{32}$$

где $\bar{c},\hat{c},\hat{\hat{c}},\hat{\hat{\hat{c}}},$ – произвольные постоянные, причем $\hat{\hat{\hat{c}}}\neq 0.$

Пусть $\bar{c}\neq 1,$ тогда учитывая (27) и (29), из второго уравнения (26) получим:

$$XF=(\bar{c}-2)F$$

решением, которой является

$$F(t,x)=x^{\bar{c}-2}\bar{F}(\xi),\tag{33}$$

где $\bar{F}$ – произвольная дифференцируемая функция от одной переменной ξ и

$$\xi=\frac{x}{\sqrt[\gamma]{t}}.\tag{34}$$

Заметим, что при $\gamma=2$ совпадает с известным преобразованием Больцмана.

Учитывая (27), (29), (31) и первое уравнение (32) из уравнения (24) получим:

$$\overset{0}{g}=\left[\hat{\hat{c}}+\hat{c}(1-\bar{c})x^{1-\bar{c}}-\bar{c}+2-\gamma\right](-h+b).\tag{35}$$

Далее из (27) найдем значение $\overset{1}{g}$

$$\overset{1}{g}=(\bar{c}-1)u-\bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c})^2.\tag{36}$$

Применяя найденные координаты (27), (35) и (36), напишем инфинитезимальный оператор:

$$X=\gamma t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+\left[\hat{\hat{c}}+\hat{c}(1-\bar{c})x^{1-\bar{c}}-\bar{c}+2-\gamma\right](-h+b)\frac{\partial}{\partial h}+\left[(\bar{c}-1)u-\bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c})^2\right]\frac{\partial}{\partial u},\tag{37}$$

Находим инварианты этого оператора, для этого необходимо решить следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dt}{\gamma t}=\frac{dx}{x}=\frac{dh}{\left[\hat{\hat{c}}+\hat{c}(1-\bar{c})x^{1-\bar{c}}-\bar{c}+2-\gamma\right](-h+b)}=\frac{du}{(\bar{c}-1)u-\bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c})^2}.\tag{38}$$

Инвариантами этого оператора будут

$$J_1=\frac{x}{\sqrt[\gamma]{t}},\quad J_2=\frac{x}{\left[(\bar{c}-1)u-\bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c})\right]^{\frac{1}{\bar{c}-1}}},\quad J_3=x^{\left(\hat{\hat{c}}-\bar{c}+2-\gamma\right)}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}(b-h).\tag{39}$$

Используя инварианты (39) напишем представление решений уравнения (1), (2):

$$u(t,x)=\frac{1}{\bar{c}-1}\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^{\bar{c}-1}-\bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c}),\quad h(t,x)=b-\frac{\bar{h}}{x^{\left(\hat{\hat{c}}-\bar{c}+2-\gamma\right)}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}},\tag{40}$$

где $\bar{u}$ и $\bar{h}$ – новые искомые функции от одной переменной ξ и

$$\xi=\frac{x}{\sqrt[\gamma]{t}}.\tag{41}$$

Учитывая (23), (31), (40) и (41) функция k принимает следующий вид

$$k=\bar{\bar{c}}\tilde{c}\frac{x^{\hat{\hat{c}}+2-\gamma}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}}{\bar{h}}.\tag{42}$$

Из (40) находим:

$$u_x=\frac{x^{\bar{c}-2}\bar{u}-\bar{u}_\xi\dfrac{x^{\bar{c}-1}}{\sqrt[\gamma]{t}}}{\bar{u}^{\bar{c}}},\quad h_x=-\frac{\bar{h}_\xi\dfrac{x}{\sqrt[\gamma]{t}}-\bar{h}\left[\hat{\hat{c}}-\bar{c}+2-\gamma+x^{1-\bar{c}}\hat{c}(1-\bar{c})\right]}{x\cdot x^{\hat{\hat{c}}-\bar{c}+2-\gamma}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}},$$

$$h_t = \frac{\frac{1}{\gamma}\bar{h}_\xi x t^{-\frac{1}{\gamma}-1}}{x^{\hat{c}-\bar{c}+2-\gamma} e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}}.$$

Подставляя выше полученные выражения в систему (1), (2) получим:

$$\hat{\hat{c}} x^{\hat{c}} e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}} \frac{\frac{1}{\gamma}\bar{h}_\xi x t^{-\frac{1}{\gamma}-1}}{x^{\hat{c}-\bar{c}+2-\gamma}\cdot e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}} + \frac{x^{\bar{c}-2}\bar{u} - \bar{u}_\xi \frac{x^{\bar{c}-1}}{\sqrt[\gamma]{t}}}{\bar{u}^{\bar{c}}} = x^{\bar{c}-2}\bar{F},$$

$$\frac{1}{\bar{c}-1}\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^{\bar{c}-1} - \bar{\bar{c}}\tilde{c}\hat{c}(1-\bar{c}) = \bar{\bar{c}}\tilde{c}\frac{x^{\hat{c}+2-\gamma}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}}{\bar{h}} \frac{\bar{h}\frac{x}{\sqrt[\gamma]{t}} - \bar{h}\left[\hat{\hat{c}} - \bar{c} + 2 - \gamma + x^{1-\bar{c}}\hat{c}(1-\bar{c})\right]}{x\cdot x^{\hat{c}-\bar{c}+2-\gamma}e^{\hat{c}x^{1-\bar{c}}}}. \qquad (43)$$

Учитывая (41) после необходимых упрощений из (43) окончательно имеем:

$$\hat{\hat{c}}\frac{1}{\gamma}\bar{h}_\xi \xi^{\gamma+1} + \frac{\bar{u} - \bar{u}_\xi \xi}{\bar{u}^{\bar{c}}} = \bar{F}, \qquad \frac{1}{(\bar{c}-1)\bar{u}^{\bar{c}-1}} = \frac{\bar{\bar{c}}\tilde{c}\bar{h}_\xi \xi}{\bar{h}} - \bar{\bar{c}}\tilde{c}\left(\hat{\hat{c}} - \bar{c} + 2 - \gamma\right) \qquad (44)$$

В результате проведенного группового анализа дифференциальных уравнений (1), (2), при помощи преобразований (40), (41) и произвольных функций (32), (33), (42) мы получили вполне определенную систему уравнений относительно функций напора и скорости фильтрации (44). Коэффициент фильтрации и функцию F представили в явных параметрических формах. Параметры, содержащиеся в них, определяются с помощью фактических измерений (или наблюдений). Также в системе (44) содержатся произвольные постоянные $\bar{c}, \bar{\bar{c}}, \tilde{c}, \hat{c}, \hat{\hat{c}}$ которые определяются из моделируемого объекта с помощью наблюдений и/или измерений.

Литература:

1. Веригин Н.Н., Васильев С.В. и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. – М.: Недра, 1977. -271 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977. –644с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
4. Керимкулова Г.К., Уралиев А.А. Моделирование пространственной фильтрации подземных вод // Материалы IV научно-теоретической конференции посвященной 5-летию Чуйского университета. Серия математики и физики. - Бишкек, 1999. -С.54-64.