Ермекбаева Ж.Ж., Бейсенби М.А., Омаров А.Н.

ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОГО МЕХАНИЗМА УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ХИЩНИК-ЖЕРТВА

Zh.Zh. Ermekbaeva, M.A. Beisenbi, A.N. Omarov

RESEARCH OF THE ADAPTIVE MECHANISM OF CONTROL BY LYAPUNOV'S METHOD FOR SYSTEM THE PREDATOR-PREY

Деградация различных экосистем, потеря видового разнообразия экосистем под воздействием антропогенного воздействия или природных катаклизмов является важной проблемой современности. В данной работе представлен механизм управления видовым разнообразием экосистем посредством однопараметрических отображений. Исследования проведены путем анализа и синтеза систем управления в классе структурно-устойчивых отображений и их применение в задачах управления для моделей экологических сообществ «хищник-жертва». Впервые исследован класс моделей экологических сообществ с воздействием ***D****-фактора – значения внешнего (экзогенного) фактора, который представлен в виде однопараметрического структурно-устойчивого отображения (катастрофа складка).*

Degradation of various ecosystems, loss of a specific variety of ecosystems under the influence of anthropogenesis influence or natural cataclysms is the important problem of the present. In the given work the control mechanism by a specific variety of ecosystems by means of one-parametrical displays is presented. Researches are spent by the analysis and synthesis of control systems in a class of structurally-steady displays and their application in problems of control for models of ecological communities "predator-prey". For the first time the class of models of ecological communities with D-factor influence – values external (exogenous) the factor which is presented in the form of one-parametrical structurally-steady display (accident a fold) is investigated.

Нахождение механизмов управления видового разнообразия экосистем носит актуальный характер в современных условиях [1-6]. В поиске управляющего механизма поддержания видового разнообразия важна роль математического моделирования, которое окажет помощь при экспериментальном исследования влияния различных биотических и абиотических факторов на экосистему. Исследование работы заключается в следующем: впервые исследован класс моделей экологических сообществ с воздействием D-фактора – значения внешнего (экзогенного) фактора, который представлен в виде однопараметрического структурно-устойчивого отображения (катастрофа складка).

В качестве базовой для изучения механизмов управления взята модель хищник-жертва с насыщением [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px(1-\beta x - \frac{z}{1+x^2}) \\ \frac{dz}{dt} &= cz(-\alpha - z + \frac{\gamma x^2}{1+x^2}) \end{aligned}, \qquad (1)$$

где $x(t)$, $z(t)$ - численности соответственно жертв и хищников в системе в момент времени t, $\alpha, \beta, \gamma, p, c = const \geq 0$; px - скорость роста популяции жертв;

$p\beta x^2$ - скорость гибели особей, вызванная действием внутрипопуляционных саморегуляторных механизмов; $\frac{pxz}{1+x^2}$ - скорость уничтожения жертв хищниками при достаточном малом значении x; αcz - скорость естественной смертности хищников; cz^2 - скорость смертности популяции хищников, вызванная действием внутрипопуляционной конкуренции; $\frac{c\gamma z x^2}{1+x^2}$ - скорость прироста численности хищников за счет поедания жертв.

Структура фазовых портретов в модели (1) имеет все виды вспышек (реверсивная, фиксированная, перманентная и собственно вспышка) [4].

В работе Омарова А.Н. [5-6] предложена модель динамики сообщества для оценки механизма управления, в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k f_k(x_1,\ldots,x_N) - \pi_k D x_k, \tag{2}$$

где $x_k(t)$ – численность k-ой популяции в момент времени t, f_k – интенсивность размножения k-ой популяции, N – общее число видов в экосистеме, D – значения внешнего (экзогенного), плотностно - независимого фактора, π_k – показатель «чувствительности» k-ой популяции к воздействию фактора D [5-6]. В работах Бейсенби М.А. [7-8] исследовались динамические свойства систем управления в классе однопараметрических (катастрофа складка) и двухпараметрических (катастрофа сборка) структурно-устойчивых отображений. Предложенная в данной работе структурно-устойчивое отображение (катастрофа складка) имеет один управляющий параметр при двух фазовых координатах. Под структурной устойчивостью следует понимать независимость качественного поведения сообщества от незначительных вариаций параметров, определяющих динамику этого сообщества.

D фактор, как управляющий, представим в виде функции структурно-устойчивого отображения - $x^3 + k_1 x$ - катастрофа складки (fold), а фактор чувствительности возьмем равным единице.

I) Рассмотрим модель хищник-жертва с одним управляющим параметром для популяции жертв:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = px(1-\beta x - \dfrac{z}{1+x^2}) - (x^3 + k_1 x) \\ \dfrac{dz}{dt} = cz(-\alpha - z + \dfrac{\gamma x^2}{1+x^2}) \end{cases}, \tag{3}$$

k - управляющий параметр, интегрированный параметр физико-механического и химико-биологического воздействия. Исключая из системы (3) переменную z, получаем полином шестой степени относительно переменной x

$$x^6 + p\beta x^5 + x^4(2+k_1-p) + 2p\beta x^3 + x^2(1+2k_1+\gamma p - \alpha p - 2p) + p\beta x + (k_1 - \alpha p - p) = 0$$

Для сравнения системы (4) с системой (1) рассмотрим фазовые портреты при тех же значениях параметров.

Фазовые портреты

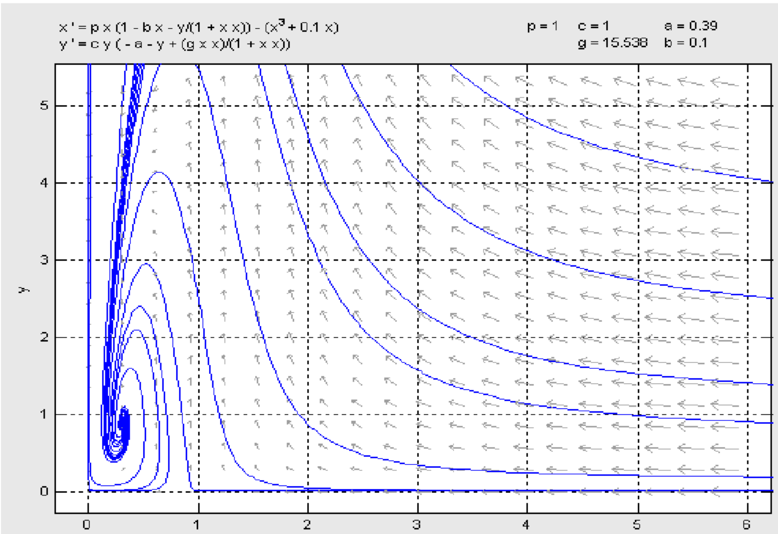

Рис.1. Фазовый портрет системы (3), при $p = 1, \alpha = 0.39, \beta = 0.1, \gamma = 15.538, c = 1$;

II) Рассмотрим модель фитофаг-энтомофаг с одним управляющим параметром для популяции жертв и хищников:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = px(1 - \beta x - \dfrac{z}{1+x^2}) - (x^3 + k_1 x) \\ \dfrac{dz}{dt} = cz(-\alpha - z + \dfrac{\gamma x^2}{1+x^2}) - (z^3 + k_2 z) \end{cases}, \qquad (4)$$

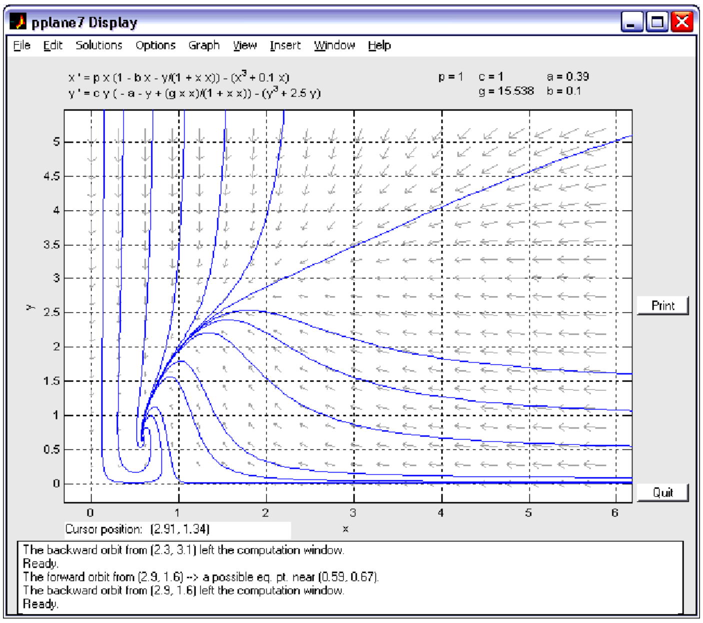

Рис.2. Фазовый портрет системы (4), при $p=1, \alpha=0.39, \beta=0.1, \gamma=15.538, c=1$;k1=0.1; k2=2.5;

В качестве инструмента управления построим адаптивную систему управления. Нахождение алгоритма управления (адаптивный регулятор) обеспечивает достижение цели за конечное время для любого объекта и условий его функционирования, принадлежащих заданному классу. В адаптивных системах при помощи обратной связи происходит измерение характеристик управляемого объекта и вырабатываются реакции, выражающиеся в управляющих воздействиях. При адаптивном управлении с эталонной моделью основное целевое условие-это обеспечение сходимости к нулю ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t) \to 0$ при $t \to \infty$ [9]. Рассмотрим более подробно второй метод Ляпунова для адаптивной системе управления с эталонной моделью. Построим функцию Ляпунова для популяции жертв. Закон управления в данном случае имеет вид $u_1 = -x^3 - k_1 x$. Для популяции жертвы перепишем уравнение в следующем виде: $\dfrac{dx}{dt} = px - p\beta x^2 - \dfrac{pxz}{1+x^2} + u_1$ и $\dfrac{dx}{dt} - px + p\beta x^2 + \dfrac{pxz}{1+x^2} = u_1$.Объединим нелинейные части в $d = p\beta x^2 + \dfrac{pxz}{1+x^2}$ и подставим в уравнение $\dot{x} - px + d = u_1 = -x^3 - k_1 x$, $u_1 = f + k_0 e + q_0 x_r + q_1 \dot{x}_r$. Ошибка сходимости имеет вид $e = x_r - x$. Перепишем уравнение $d - f - q_0 x_r - q_1 \dot{x}_r = -\dot{x} + px + k_0 e$. В обе части добавим выражение $\dot{x}_r - px_r$, где получаем $(\dot{x}_r - \dot{x}) - p(x_r - x) + k_0 e = d - f - (q_0 + p)x_r + (1 - q_1)\dot{x}_r$ и $\dot{e} + (k_0 - p)e = d - f - (q_0 + p)x_r + (1 - q_1)\dot{x}_r$ Ошибка слежения имеет вид : $E = e_m - e$ и после подстановки уравнение получаем

$$\dot{E} = -ae_m - (p - k_0)e + ae - ae - (d - f) - (-q_0 - p)x_r + (1 - q_1)\dot{x}_r$$

$$\dot{E} = -aE + (k_0 - p - a)X + (f - d) + (p + q_0)x_r + (q_1 - 1)\dot{x}_r$$

Кандидат на функцию Ляпунова имеет следующий вид:

$$V = E^2 + Q_0(k_0 - p - a - k_0^*)^2 + Q_1(f - d - f^*)^2 + Q_2(p + q_0 - q_0^*)^2 + Q_3(q_1 - 1 - q_1^*)^2$$

$$\dot{V} = 2E[-aE + (k_0 - p - a)X + (f - d) + (p + q_0)x_r + (q_1 - 1)\dot{x}_r] +$$

$$2Q_1(f - d - f^*)(\dot{f} - \dot{f}^*) + 2Q_0(k_0 - p - a - k_0^*)(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) + 2Q_2(p + q_0 - q_0^*)(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) +$$

$$+2Q_3(q_1 - 1 - q_1^*)(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*) =$$

$$2E[-aE + (k_0 - p - a)X + (f - d) + (p + q_0)x_r + (q_1 - 1)\dot{x}_r] +$$

$$+2Q_1(f - d)(\dot{f} - \dot{f}^*) - 2Q_1 f^*(\dot{f} - \dot{f}^*) + 2Q_0(k_0 - p - a)(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) -$$

$$-2Q_0 k_0^*(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) + 2Q_2(p + q_0)(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) - 2Q_2 q_0^*(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) +$$

$$+2Q_3(q_1 - 1)(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*) - 2Q_3 q_1^*(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*) =$$

$$= -2aE^2 + 2Q_1(f - d)(\dot{f} - \dot{f}^*) + 2E(f - d) - 2Q_1 f^*(\dot{f} - \dot{f}^*) +$$

$$+2Q_0(k_0 - p - a)(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) + 2(k_0 - p - a)EX - 2Q_0 k_0^*(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) +$$

$$2Q_2(p + q_0)(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) + 2(p + q_0)Ex_r - 2Q_2 q_0^*(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) + 2Q_3(q_1 - 1)(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*) +$$

$$+2(q - 1)E\dot{x}_r - 2Q_3 q_1^*(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*)$$

После сокращения членов получаем следующий вид:

$$\dot{V} = -2aE^2 + 2Q_1(f - d)(\dot{f} - \dot{f}^*) - 2e(f - d) -$$

$$-2Q_1 f^*(\dot{f} - \dot{f}^*) + 2Q_0(k_0 - p - a)(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) -$$

$$-2e(k_0 - p - a)e - 2Q_0 k_0^*(\dot{k}_0 - \dot{k}_0^*) +$$

$$2Q_2(p + q_0)(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) + 2e(p + q_0)x_r$$

$$-2Q_2 q_0^*(\dot{q}_0 - \dot{q}_0^*) + 2Q_3(q_1 - 1)(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*) +$$

$$+2e(q - 1)\dot{x}_r - 2Q_3 q_1^*(\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*)$$

После алгебраических операции и подстановок получаем:

$$\dot{V} = -2aE^2 - 2Q_1 Q_1^* r - 2Q_0 Q_0^* r^2 e^2 - 2Q_2 Q_2^* r^2 x_r^2 - 2Q_3 Q_3^* r^2 (\dot{x}_r)^2$$

$$\dot{f} = \dot{f}^* + r = Q_1^* \dot{r} + r$$

$$\dot{k}_0 = \dot{k}_0^* + re = Q_0^* \frac{d(re)}{dt} + re$$

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_0^* + rx_r = Q_2^* \frac{d(rx_r)}{dt} + rx_r$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1^* - r\dot{x}_r = Q_3^* \frac{d(r\dot{x}_r)}{dt} + r\dot{x}_r$$

Механизмы адаптации (регуляторы) заложены в следующей форме:

$$f = \int r dt + Q_1^* r + f(0)$$

$$k_0 = \int (re) dt + Q_0^*(re) + k_0(0)$$

$$q_0 = \int (rx_r) dt + Q_2^*(rx_r) + q_0(0)$$

$$q_1 = \int (r\dot{x}_r) dt + Q_3^*(rx_r) + q_0(0)$$

По второму методу, для популяции жертв в качестве кандидата на функцию Ляпунова выведен $V = E^2 + Q_0(k_0 - p - a - k_0^*)^2 + Q_1(f - d - f^*)^2 + Q_2(p + q_0 - q_0^*)^2 + Q_3(q_1 - 1 - q_1^*)^2 > 0$ и ее производная $\dot{V} = -2aE^2 - 2Q_1 f^* r - 2Q_0 k_0^* re - 2Q_2 q_0^* r x_r - 2Q_3 q_1^* r \dot{x}_r \le 0$. Функция Ляпунова для популяции хищников имеет схожий алгоритм.

Полученные результаты по методу Ляпунова

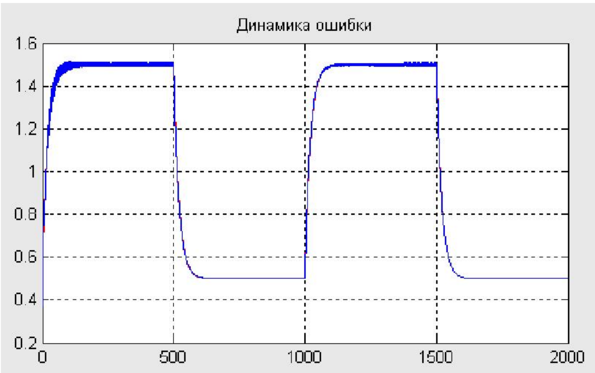

Рис 3. Общий вид динамики ошибки, при начальных условиях $x_0 = 0.5, z_0 = 2.5$

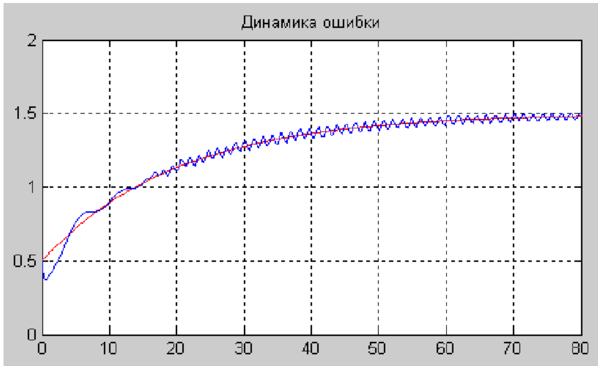

Рис 4. Увеличенный фрагмент рисунка 3 при начальных условиях $x_0 = 0.5, z_0 = 2.5$

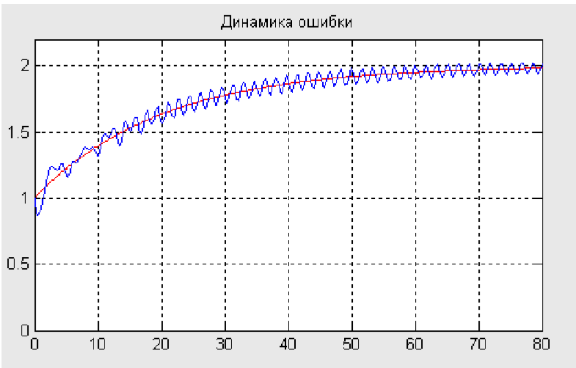

Рис 5. При начальных условиях $x_0 = 1, z_0 = 1$

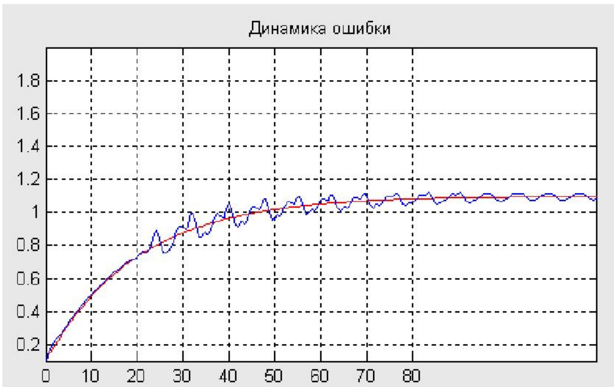

Рис 6. При начальных условиях $x_0 = 0.1, z_0 = 0.5$

В данной работе функция Ляпунова дает возможность оценить изменения регулируемой величины, оценить времени протекания переходного процесса (времени регулирования), а также влияние постоянно действующих возмущений. Анализ воздействия однопараметрического структурно-устойчивого отображения показало более существенное изменение в динамике популяций, а также предсказуемость событий. Таким образом, механизм управления видовым разнообразием возможен посредством структурно-устойчивого отображения, когда динамика популяций становится более управляемой.

Литература

1. Исаев А.С., Хлебопрос Р.Г., Недорезов Л.В и др. Динамика численности лесных насекомых. Новосибирск: Наука, 1984, с.294.
2. Недорезов Л.В. Моделирование вспышек массовых размножений насекомых, Новосибирск: Наука, 1986.
3. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997, 161 с.
4. Недорезов Л.В., Омаров А.Н. Восстановление структур фазовых портретов динамики численности популяций. Красноярск: Препринт Института леса и древесины СО АН СССР.1986,41 с.
5. Омаров А.Н., Недорезов Л.В., Абросов Н.С. Метод сравнения устойчивости видового разнообразия проточных систем. Красноярск: Препринт №80Б, 1988. – 32 с.
6. Omarov A.N. The kinetic approach to a problem of variety and stability ecosystem. International Conference M34 "Mathematical Modeling of Ecologycal Systems.- Dairk-Press, 2003, p. 35.
7. Бейсенби М.А. Модели, методы анализа и синтеза предельно устойчивых систем управления. Автореф. дис. док. Алматы.1998, 46 с.
8. Бейсенби М.А., Тен В.В. Синтез робастно устойчивой системы управления в классе трехпараметрических структурно-устойчивых отображений для технологического процесса сушки. Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева – 2004. – №5 (43). – Алматы: КазНТУ. – с. 110 – 116.
9. V. Nikulin, "Fusion of Adaptive Beam Steering and Optimization-Based Wavefront Control for Laser Communications in the Atmosphere," Optical Engineering, Vol. 44, No. 10, Oct. 2005, pp.106001-1-9.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Омуров Т.