МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. СТРОИТЕЛЬСТВО. ГЕОЛОГИЯ

Паизов А., Сатыбаев А.Дж.

ОБ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМИКИ

A. Paizov, A.Dzh. Satybaev

*A*BOUT ONE OF ONE DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM SEISMIC

УДК 519.876.2

Цель работы заключается в построении численного решения одномерной обратной задачи волновых процессов - сейсмики.

The target of this work is concentrated on cflculaition to solve the inverse problem of wave's processes-seismic.

Одномерные обратные задачи волновых процессов в теоретическом и прикладном плане в различных постановках исследованы в работах ученых А.С. Алексеева, М.М. Лаврентьева, А.Б. Баева, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина, В.Г. Яхно , К.Г. Резницкой и т.д..

1. Постановка задачи. На основе линейного приближения можно получить одномерную прямую задачу сейсмики

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_0(x_3,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu_0(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3}\right),\quad x_3\in R_+, t\in R_+, \tag{1}$$

$$u_0(x_3,t)\Big|_{t<0}\equiv 0,\qquad \mu_0(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}=-\frac{1}{2}\delta(t),\ t\in R_+, \tag{2}$$

где $\rho_0(x_3)$ - плотность среды, $\mu_0(x_3)$ - коэффициент Ламе, $u_0(x_3,t)$ - смещения.

Условие (2) означает, что среда до определенного времени $t=0$ находится в покое и в момент времени $t=0$ на поверхность Земли действует мгновенный источник по времени $\delta(t)$ - дельта функция Дирака.

Обратная задача заключается в определении $\mu_0(x_3)$ - коэффициента Ламе при известной $\rho_0(x_3)$ и дополнительной информации вида

$$u_0(x_3,t)\Big|_{x_3=0}=f(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\mu_0(x_3),\quad \rho_0(x_3)\in\Lambda_0=\left\{\rho_0(x)\in C^6(R_+),\rho_0'(+0)=0,\right.$$
$$\left.0<M_1\le\rho_0(x)\le M_2,\|\rho_0\|_{C^2}\le M_3\right\} \tag{*}$$

Если выполнено условие (*), то существует решение прямой задачи. Из (1)

$$u_{0tt}(x_3,t)=(\mu_0(x_3)u_{0x_3x_3}(x_3,t)+\mu_{0x_3}(x_3)u_{x_3}(x_3,t))\Big/\rho_3(x_3).$$

Введем новую переменную $x=\int\limits_0^{x_3}\frac{\sqrt{\rho_3(x_3)}dx}{\sqrt{\mu_0(x)}}$ и новые функции

$$u(x,t)=u_0(x_3,t),C(x)=\sqrt{\mu_0(x_3)}\Big/\rho_3(x_3).$$

$$u_{0tt}(x_3,t)=u_{tt},\ \ u_{0x_3}(x_3,t)=u_x(x,t)\ (\mu_0(x_3))^{\frac{-1}{2}},\ \ \mu_0(x_3)=C^2(x),$$

Вычислим
$$u_{0x_3x_3}(x_3,t)=u_{xx}(x,t)\frac{1}{\mu_0(x_3)}-\frac{\mu_0'(x_3)*u_x(x,t)}{2\mu_0^{3\backslash 2}(x_3)},\qquad \mu_0'(x_3)=2C'(x).$$

Замечание. *Случай* $\rho_3(x_3)=1$ *исследован, здесь рассматривается, когда плотность* $\rho_3(x_3)$ *переменная.*

Тогда из (1)-(3) имеем следующую задачу

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+\frac{C'(x)}{C(x)}u_x(x,t), \qquad x\in R_+, t\in R_+, \tag{4}$$

$$u(x,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \qquad C(x)u_x(x,t)\big|_{x=0}=-\frac{1}{2}\delta(t), \qquad t\in R_+, \tag{5}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=f(t), \qquad t\in R_+.$$

Продолжим теперь функции *C(x)* и *u(x,t)* четным образом по переменной *x* на полупространство $x\in R\_$. Решение прямой задачи (4)-(5) будем искать в виде

$$u(x,t)=\widetilde{u}(x,t)+S(x)\theta(t-|x|), \qquad x\in R, \qquad t\in R_+,$$

где $\widetilde{u}(x,t)$ - гладкая непрерывная функция.

В таком случае относительно функции *S(x)* имеем обратную задачу:

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-\frac{2S'(x)}{S(x)}u_x(x,t), \qquad (x,t)\in\Delta(T), \tag{6}$$

$$u(x,t)\big|_{t=|x|}=S(x), \qquad x\in\left[0,\frac{T}{2}\right], \tag{7}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=f(t), \qquad t\in[0,T], \tag{8}$$

где $\Delta(T)=\left\{(x,t)\in(R\times R_+): x\in(0,\frac{T}{2}),\ |x|<t<T-|x|\right\}$.

Функции *S(x)* и *C(x)* связаны соотношением

$$S(x)=\sqrt{\frac{1}{C(0)C(x)}}\,. \tag{9}$$

2. Конечно-разностное решение. ***Теорема 1.*** Пусть для $f(t)\in C^4[0,T]$ существует решение обратной задачи (6)-(8) удовлетворяющее условию (*) и решению прямой задачи (4)-(5) $u(x,t)\in C^4(\Delta(t))$. Тогда, при малом *T*, S_i - приближенное решение обратной задачи, построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению обратной задачи (6)-(8) в классе *C* со скоростью порядка *O(h)*.

Повышенное условие $f(t)\in C^4[0,T]$ **- взято для того, чтобы применит конечно-разностный метод.**

Доказательство теоремы проводится по методике, приведенной в работе. Введем сеточную область

$$\Delta_h(T)=\left\{x_i=ih, t_k=kh, (ih,kh): h=T/2N, \quad ih\in(0,T/2),\ i=\overline{1,N},\ ih\le kh\le T-ih\right\}, \tag{10}$$

где *h* – сеточный шаг по *x,t*.

Составим разностную схему для обратной задачи (6)-(8)

$$u_{\bar t t}(ih,kh)=u_{\bar x x}(ih,kh)-2\frac{S_{0\bar x}(ih)}{\frac{S_i+S_{i-2}}{2}}\cdot u_{0\bar x}(ih,kh)+O(h),\quad (ih,kh)\in\Delta_h(T),\quad u_i^i=S_i\ ,\ i=\overline{0,N},\tag{11}$$

$$u_o^k=f^k\quad ,\qquad k=\overline{0{,}2N}.\tag{12}$$

Исследуем в начале сходимости обратной задачи (11)-(12) к точному решению. Для этого распишем разностное уравнение

$$u_{i+1}^k=u_i^{k+1}+u_i^{k-1}-u^k{}_{i-1}+h^2B_i^k,$$

$$где\qquad B_i^k=\frac{S_i-S_{i-2}}{h^2}\cdot\frac{4}{S_i+S_{i-2}}\cdot(u_i^k-u_{i-2}^k).\tag{13}$$

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения

$u_i^{k+1},\quad u_i^{k-1},\quad u_{i-1}^{k-2},\ldots$ последовательно, получим

$$u_{i+1}^k=\frac{1}{2}\left[f^{k+i+1}+f^{k-i-1}\right]+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{k-i-\mu+2p}.\tag{14}$$

Полагая в последнем $k=i+1$ и учитывая вторую формулу (11) имеем

$$S_{i+1}=\frac{1}{2}\left[f^{2i+2}+f^{0}\right]+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{1-\mu+2p}.\tag{15}$$

Из (14) следуют

$$u_i^k=\frac{1}{2}\left(f^{k+i}+f^{k-i}\right)+h^2\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{\mu=1}^{p}B_k^{k-i-\mu+2p+1}.\tag{16}$$

$$u_{i-2}^k=\frac{1}{2}(f^{k+i-2}+f^{k-i+2})+h^2\sum_{p=1}^{i-3}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{k-i-\mu+2p+3}.\tag{17}$$

Откуда

$$\frac{u_i^k-u_{i-2}^k}{h}=\frac{1}{2h}\left(f^{k+i}-f^{k+i-2}+f^{k-i}-f^{k-i+2}\right)+h\sum_{\mu=1}^{i-1}B_\mu^{k-i+\mu+1}+h\sum_{\mu=1}^{i-1}B_\mu^{k+i-\mu-1},\tag{18}$$

а из (16) и (17) следуют

$$S_i=\frac{1}{2}\left[f^{2i}+f^0\right]+h^2\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{1-\mu+2p},\tag{19}$$

$$S_{i-2}=\frac{1}{2}\left[f^{2i-4}+f^{0}\right]+h^2\sum_{p=1}^{i-3}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{1-\mu+2p}.\tag{20}$$

Следовательно,

$$\frac{S_i-S_{i-2}}{h}=\frac{1}{2h}\left(f^{2i}-f^{2i-4}\right)+h\sum_{\mu=1}^{i-1}B_\mu^{2i-\mu-1}+h\sum_{\mu=1}^{i-3}B_\mu^{2i-\mu-3}.\tag{21}$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f^{k+i} + f^{k-i} \\ \frac{1}{h}\left(f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}\right) \\ f^{2i} + f^0 \\ \frac{1}{h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\Phi_i^k = COLON(u_i^k \ \frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h}, S, \frac{S_i - S_{i-2}}{h}), \tag{23}$$

и введем операторное выражение

$$A\left[\Phi_p^k\right] = \begin{pmatrix} h\sum_{\mu=1}^{p} B_\mu^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h\sum_{\mu=1}^{p} B_\mu^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} - B_o^{2i-3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Тогда из (16),(18), (19),(21) следует

$$\Phi_i^k = F_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k\right]. \tag{25}$$

Точно такое же можно получить и для $\widetilde{\Phi}_i^k : \widetilde{\Phi}_i^k = \widetilde{F}_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\widetilde{\Phi}_p^k\right]$, где вместо u_i^k, S_i записываются $\widetilde{u}_i^k, \widetilde{S}_i$.

Из последней формулы и (25) имеем

$$\left| \ \Phi_i^k - \widetilde{\Phi}_i^k \ \right|_C \le \left| \ F_i^k - \widetilde{F}_i^k \ \right|_C + h \left| \ \sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k - \widetilde{\Phi}_p^k\right] \right|_C$$

Введем обозначения $\Delta_i = \max(\Phi_i^k - \widetilde{\Phi}_i^k), \delta_i = \max(F_i^k - \widetilde{F}_i^k), \quad k = i....2N - i,$

Используя дискретный аналог Гронуолла - Беллмана, имеем

$$\max_{0 \le i \le N} \left| \ \Delta_i \ \right|_C \le \left| \ \delta_i \ \right|_C * \exp\{h \left| \ A[\Delta_i] \right|_C$$

Доказано утверждение теоремы.

Литература:

1. Сатыбаев А.Дж. Численное определение коэффициента Ламэ в уравнении сейсмики //История, культура и экономика, наука юга Кыргызстана. – Ош: КУУ, 2000.- С.148-152.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.