

Кудайкулов А.К., Кенжегулов Б.З., Амиртаев К.Б.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УДЛИНЕНИЯ
ЧАСТИЧНО-ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ
СТЕРЖНЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРЫ, ТЕПЛООВОГО ПОТОКА,
ТЕПЛООБМЕНА И РАСТЯГИВАЮЩЕЙ СИЛЫ**

A.K. Kudailulov, B.Z. Kenzhegulov, K.B. Amirtaev

**NUMERICAL INVESTIGATION OF ELONGATION OF THE BAR HEAT-INSULATED ON
THE FLANK SURFACE AT THERMAL EFFECT, HEAT CURRENT, HEAT EXCHANGE
AND STRETCHING FORCE**

УДК: 539.3

Пусть нам дан стержень ограниченной длины L , (см). Площадь поперечного сечения F , (см²) постоянна по длине. Боковая поверхность стержня частично-теплоизолирована. В точке $x = 0$ задана температура $T(x = 0) = T_1$, на боковую поверхность участка $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_2 < L$ подведен тепловой поток, Через боковой поверхности участка $x_3 \leq x \leq x_4$, $x_4 < L$ происходит теплообмен с окружающей средой.

Здесь коэффициент теплообмена h_1 , (Вт/см²°С), а температура окружающей среды левого конца боковой поверхности будет T_{oc1} (°С). А также через площадь поперечного сечения точки $x = L$ происходит теплообмен с окружающей средой и здесь коэффициент теплообмена h_2 , (Вт/см²°С), а температура окружающей среды будет T_{oc2} (°С). А также $x = 0$ конец стержня жестко зашцеилен, а на $x = L$ конце приложена осевая растягивающая сила P , (кГ) (рисунок 1).

$$T(x=0)=T_1$$

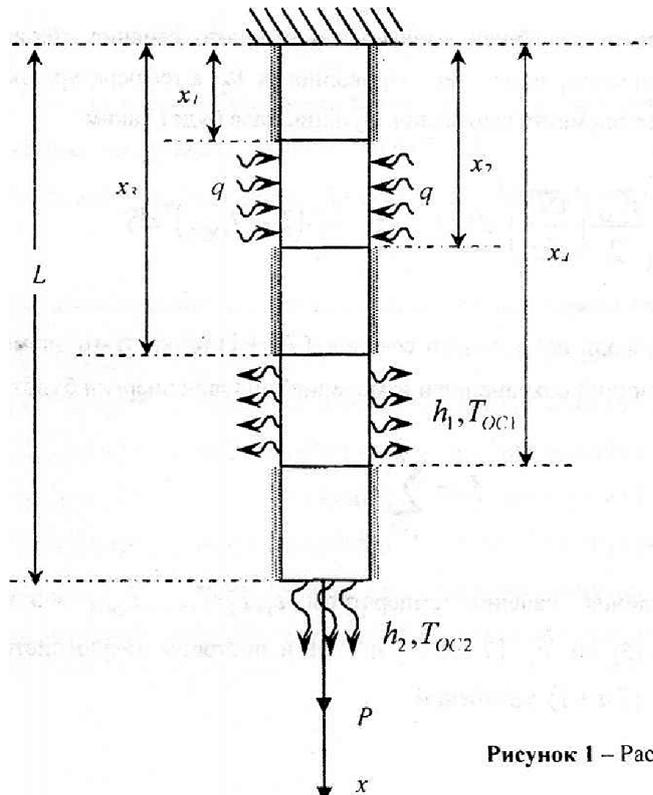


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи

Надо исследовать удлинения стержня засчет разного рода тепловых источников и растягивающей силы. Здесь боковые поверхности участков $0 \leq x \leq x_1$ и $x_4 \leq x \leq L$ стержня теплоизолированы.

Надо найти удлинение стержня засчет поля распределения температуры по длине стержня и растягивающей силы P . Теперь для каждого квадратичного конечного элемента напишем выражение тепловой энергии. Из-за того, что боковая поверхность участков $(0 \leq x \leq x_1)$, $(x_2 \leq x \leq x_3)$ и $(x_4 \leq x \leq L)$ стержня теплоизолирована, вид соответственного функционала для всех элементов этих участков будет следующим [1]

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV, \quad \left(i = 1 + \frac{x_1}{l}, i = \left(\frac{x_2}{l} + \frac{x_3}{l} \right), i = \left(\frac{x_4}{l} + \frac{L}{l} - 1 \right), \right. \quad (1)$$

здесь $V^{(i)}$ - объемы конечных элементов.

Из-за того, что на боковую поверхность участка $x_1 \leq x \leq x_2$ стержня подведен тепловой поток, то выражение соответственного функционала для всех конечных элементов в этом участке будет следующим

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{\text{бн}}^{(i)}} q T dS, \quad \left(i = \frac{x_1}{l} + \frac{x_2}{l} \right), \quad (2)$$

где $S_{\text{бн}}^{(i)}$ - площадь боковой поверхности i -того элемента. На участке $x_3 \leq x \leq x_4$ стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Здесь коэффициент теплопроводности h_1 , а температура окружающей среды $T_{\text{ок1}}$. Поэтому на этом участке для всех элементов выражение соответствующего функционала имеет следующий вид

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{\text{бн}}^{(i)}} \frac{h_1}{2} (T - T_{\text{ок1}})^2 dS, \quad i = \left(\frac{x_3}{l} + \frac{x_4}{l} \right). \quad (3)$$

В точке $x = L$ соответствующей площади поперечного сечения стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Здесь коэффициент теплопроводности h_2 , а температура окружающей среды $T_{\text{ок2}}$. Тогда для самого конечного n -го элемента выражение функционала будет таким

$$I_n = \int_{V^{(n)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{(2n+1)\text{пс}}^{(n)}} \frac{h_2}{2} (T - T_{\text{ок2}})^2 dS, \quad (4)$$

здесь $S_{(2n+1)\text{пс}}^{(n)}$ - площадь поперечного сечения $(2n+1)$ точки n -го элемента. Тогда для всего стержня вид функционала, выражающий сохранение и изменение тепловой энергии будет следующим

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (5)$$

Теперь для нахождения значения температуры $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{2n+1}$ в этих $(2n+1)$ узловых точках, минимизируем функции (5) по T_j ($j = 1 + (2n+1)$) и построим такую систему линейных алгебраических уравнений, состоящей из $(2n+1)$ уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial T_j} = 0, j = 1 \div (2n + 1). \quad (6)$$

Решая систему уравнений методом Гаусса, находят значения температуры в узловых точках конечных элементов. Тогда удлинение стержня L -длины [2] за счет поля температуры $T = T(x)$ определяется следующим образом:

$$\Delta l_T = \int_0^L \alpha T(x) dx, \quad (7)$$

где α ($1/^\circ\text{C}$)-коэффициент теплового расширения материала стержня. Если удлинение стержня за счет приложенной осевой растягивающей силы P будет соответственно [1] таким

$$\Delta l_P = \frac{PL}{EF}, \quad (8)$$

тогда, общее удлинение данного стержня будет

$$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_P = \int_0^L \alpha T(x) dx + \frac{PL}{EF}. \quad (9)$$

В данном примере $T(x=0) = T_1 = 90(^\circ\text{C})$.

$$L = 80(\text{см}), x_1 = 16(\text{см}), x_2 = 32(\text{см}), x_3 = 48(\text{см}), x_4 = 64(\text{см}), n = 800, F = 20(\text{см}^2),$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}}; q_1 = -50 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; q_2 = -100 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; q_3 = -150 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2};$$

$$q_4 = -200 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; h_1 = 8 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}; T_{\alpha 1} = 40^\circ\text{C}; h_2 = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}; T_{\alpha 2} = 20^\circ\text{C};$$

Здесь исследуем влияние разных значений теплового потока q_1, q_2, q_3 на удлинение стержня.

I-вариант. Пусть на боковую поверхность участка $16(\text{см}) \leq x \leq 32(\text{см})$ стержня подведен тепловой поток $q = -50(\text{Вт}/\text{см}^2)$. Тогда поле распределения температуры стержня приведено в виде таблицы 1 и рисунка 2.

Таблица 1 – Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при $q = -50(\text{Вт}/\text{см}^2)$

T1= 90,0000000	T350= 154,3074093	T700= 123,5171211	T1050= 44,4935098	T1400= 33,1774907
T50= 99,1100804	T400= 159,8877904	T750= 110,7946365	T1100= 42,0119244	T1450= 31,2677094
T100= 108,4060808	T450= 162,0277831	T800= 98,0721519	T1150= 40,6895711	T1500= 29,3579282
T150= 117,7020811	T500= 160,7273876	T850= 85,3496672	T1200= 39,7645353	T1550= 27,4481469
T200= 126,9980815	T550= 155,9866038	T900= 72,6271826	T1250= 38,7038294	T1600= 25,5383657
T250= 136,2940819	T600= 147,8054317	T950= 59,9046980	T1300= 36,9970532	T1601= 25,5001700
T300= 145,5900823	T650= 136,2396057	T1000= 49,5641690	T1350= 35,0872720	

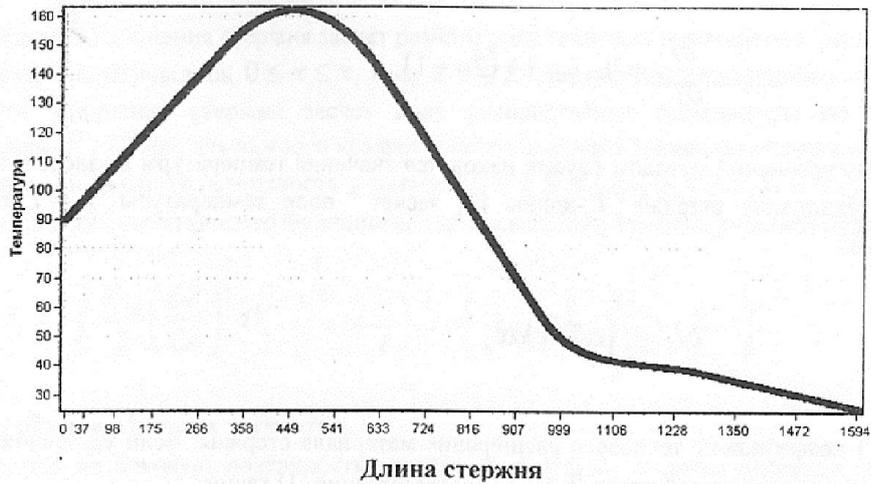


Рисунок 2 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при $q = -50 (Вт/см^2)$

II – вариант.

Здесь на боковую поверхность участка $16(см) \leq x \leq 32(см)$ стержня подведен тепловой поток $q = -100 (Вт/см^2)$. Поле распределения температуры стержня приведено в виде таблицы 2 и рисунка 3.

Таблица 2 – Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при $q = -100 (Вт/см^2)$

T1= 90,0000000	T350= 235,6143867	T700= 191,0820875	T1050= 48,1981477	T1400= 33,3335169
T50= 110,6069196	T400= 249,2106169	T750= 168,0725865	T1100= 43,7807754	T1450= 31,4011232
T100= 131,6343885	T450= 255,9260707	T800= 145,0630854	T1150= 41,5418131	T1500= 29,4687294
T150= 152,6618575	T500= 255,7607478	T850= 122,0535844	T1200= 40,1912138	T1550= 27,5363356
T200= 173,6893264	T550= 248,7146484	T900= 99,0440834	T1250= 38,9507883	T1600= 25,6039419
T250= 194,7167954	T600= 234,7877724	T950= 76,0345824	T1300= 37,1983044	T1601= 25,5652940
T300= 215,7442643	T650= 214,0915885	T1000= 57,3391347	T1350= 35,2659107	

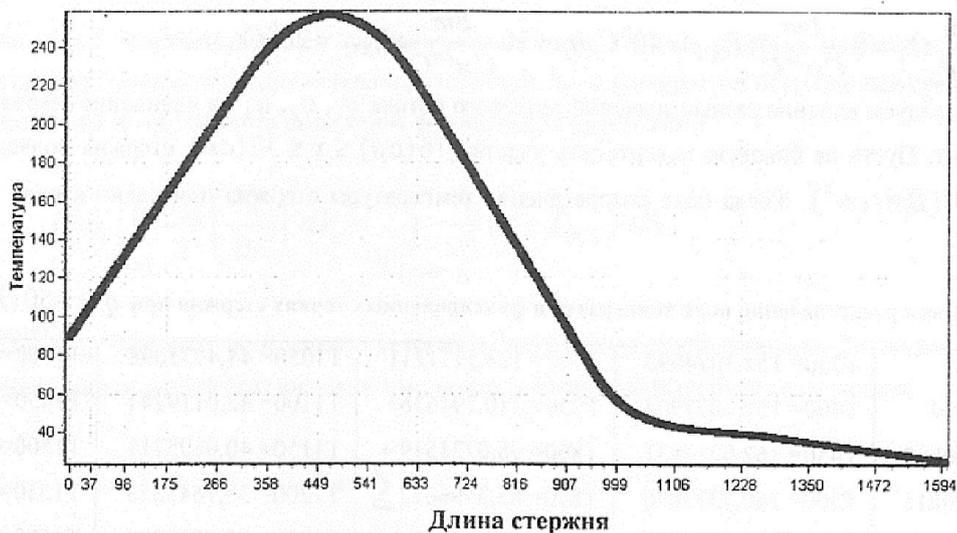


Рисунок 3 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при $q = -100 (Вт/см^2)$.

III- вариант.

Пусть на боковую поверхность участка $16(см) \leq x \leq 32(см)$ стержня подведен тепловой поток $q = -150 (Вт/см^2)$. Поле распределения температуры стержня приведено в виде таблицы 3 и рисунка 4.

Таблица 3 – Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при $q = -150 (Вт / см^2)$

T1= 90,0000000	T350= 316,9213640	T700= 258,6470539	T1050= 50,2396492	T1400= 33,4895431
T50= 122,1037588	T400= 338,5334435	T750= 225,3505365	T1100= 45,5496264	T1450= 31,5345369
T100= 154,8626963	T450= 349,8243582	T800= 192,0540190	T1150= 42,3940551	T1500= 29,5795306
T150= 187,6216338	T500= 350,7941080	T850= 158,7575016	T1200= 40,6178923	T1550= 27,6245244
T200= 220,3805714	T550= 341,4426930	T900= 125,4609842	T1250= 39,1977472	T1600= 25,6695181
T250= 253,1395089	T600= 321,7701131	T950= 92,1644667	T1300= 37,3995556	T1601= 25,6304180
T300= 285,8984464	T650= 291,9435713	T1000= 65,1141003	T1350= 35,4445494	

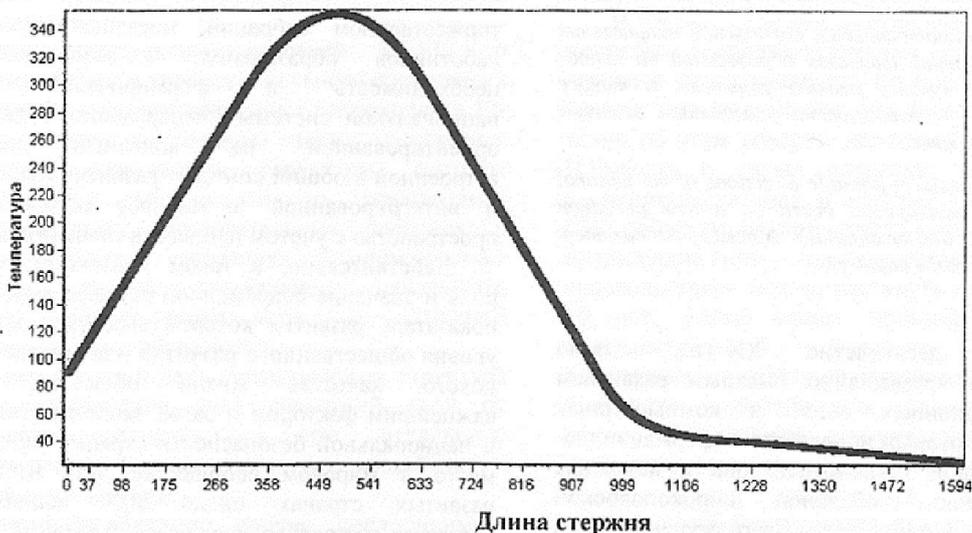


Рисунок 4 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при $q = -150 (Вт / см^2)$

После апробации разработанного вычислительного алгоритма, анализируем в этом примере влияние теплового потока на удлинения исследуемого стержня. Для этого вычислим значения $\Delta l_T, (см)$, $\Delta l_p, (см)$ и $\Delta l_T / \Delta l_p$ при разных значениях теплового потока. Эти результаты приводятся в таблице 4.

Таблица 4 – Влияние теплового потока на удлинения исследуемого стержня

№	$q, (Вт / см^2)$	$\Delta l_T, (см)$	$\Delta l_p, (см)$	$\Delta l_T / \Delta l_p$	%
1.	-50	0,896	0,006666	134,4	100
2.	-100	0,124	0,006618	187,354	139,9
3.	-150	0,160	0,006658	240,3	178,79

Литература

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392с.
2. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - Киев: Высшая школа, - 1973. - 672с.

Рецензент: д. ф.-м. н. Ли В.П.