ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ

Садыкова Д.А.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ РЕЗОНАНСНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

D.A. Sadykova

ASYMPTOTICS OF THE RESONANT SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC PROBLEM

УДК:372.09

В данной статье изучается первая краевая задача для двумерного сингулярно возмущенного параболического уравнения:

In this paper we study the first boundary problem for two-dimensional singularly perturbed parabolic equation:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u + L(t)u(x,y,t,\varepsilon) = f(x,y)e^{\frac{i\theta(t)}{\varepsilon}},\ (x,y,t)\in\Omega x,(0,\tau], \tag{1}$$

$$u(x,y,t,\varepsilon)\big|_{t=0} = h(x,y),\quad u(x,y,t,\varepsilon)\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Пусть данные задачи являются гладкими функциями, кроме того предположим выполненными следующие условия:

1) $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;

2) для спектра оператора $L(t)\psi_i(y,t) = \lambda_i(t)\psi_i(y,t),\ \ \psi_i(y,t)\big|_{y=0} = \psi_i(y,t)\big|_{y=1} = 0$

имеет место: $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \ge 0,\ i=1,\ \ \lambda_1(t) = i\theta'(t)\ \ \forall t\in[0,T]$ и $\lambda_i(t)\ne\lambda_j(t)\ \ \forall i\ne j, j\ge 1.$

3) выполнены условия согласования начального и граничных условий $h(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0.$

Скалярный случай задачи (1), (2) с осциллирующей правой частью изучена в работе [2]. Многомерная задача, когда ни одна из точек спектра несовпадает с $i\theta'(t)$, называемой нерезонансной задачей, изучена в работе [3].

п.1. Регуляризация задачи.

Исходя из условий (2) введем регуляризующие функции

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(s)ds;\quad \xi_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi_e(x),\quad \varphi_e(x) = (-1)^{e-1}\int_{e-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}};\ e=1,2;$$

$$\tau_1 = \frac{i}{\varepsilon}\big[\theta(t)-\theta(0)\big],\ j\ge 1. \tag{3}$$

и вместо искомой функции будем изучать расширенную функцию

$\tilde u(x,y,t,\xi,\tau,\varepsilon),\quad \xi=(\xi_1,\xi_2),\quad \tau=(\tau_1,\tau_2,...)$ такую, что

$$\tilde u(x,y,t,\xi,\tau,\varepsilon)\big|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,y,t,\varepsilon) \tag{4}$$

На основании (3) из (4) найдем

$$\partial_t u \equiv \left(\partial_t\tilde u + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(t)\partial_{\tau_j}\tilde u\right)\bigg|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial_x u \equiv \left(\partial_x\tilde u + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{e=1}^{2}\varphi_e'(x)\partial_{\xi_e}\tilde u\right)\bigg|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial_x^2 u \equiv \left(\partial_x^2\tilde u + \sum_{e=1}^{2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\varphi_e'^2(x)\partial_{\xi_e}^2\tilde u + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}L_{\xi,e}\tilde u\right]\right)\bigg|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)},$$

$$L_{\xi_e} \equiv \varphi_e'(x)\partial^2_{x\xi_e} + \varphi_e''(x)\partial_{\xi_e},$$

тогда для расширенной функции $\widetilde{u}$ получим задачу

$$\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{u} \equiv D_\tau \widetilde{u} + \varepsilon T\widetilde{u} - \sqrt{\varepsilon^3} L_\xi \widetilde{u} - \varepsilon^2 L_x \widetilde{u} = f(x,y)\exp\left(-\tau_1 + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right), \ M \in G$$

$$\widetilde{u}\Big|_{t=\tau=0} = h(x,y), \ \widetilde{u}\Big|_{\partial G} = 0,$$

где

$$D_\tau \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(t)\partial_{\tau_j} + L(t), \ \ T \equiv \partial_t - \sum_{e=1}^{2} \partial^2_{\xi_e},$$

$$L_\xi \equiv a(x)\sum_{e=1}^{2} L_{\xi,e}, \qquad L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \ \ G = \{M : x,y \in \Omega, t \in (0,T], \tau, \xi \in (0,+\infty)\},$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots), \ \xi = (\xi_1, \xi_2), \ M = (x,y,t,\tau,\xi)$$

Задача (4) регулярна по ε при $\varepsilon > 0$, ибо имеет место тождество

$$\left(\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{u}(M,\varepsilon)\right)_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon) \tag{5}$$

Решение расширенной задачи будем определять в виде ряда

$$\widetilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k u_k(M) \tag{6}$$

Подставим (6) в задачу (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$D_\tau u_{-2} = 0, \ \ D_\tau u_{-1} = 0, \ \ D_\tau u_0 + Tu_{-2} = f(x,y)\exp\left(-\tau_1 + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right),$$

$$D_\tau u_k + Tu_{k-2} - L_\xi u_{k-3} - L_x u_{k-4} = 0, \tag{7}$$

$$u_{-2}(M)\Big|_{t=\tau=0} = 0, \ \ u_{-1}(M)\Big|_{t=\tau=0} = 0, \ \ u_0(M)\Big|_{t=\tau=0} = h(x,y),$$

$$u_k(M)\Big|_{t=\tau=0} = 0 \ \ \forall k \geq 1, \ u_k\Big|_{\partial G} = 0.$$

Введем пространство, в котором будут решаться итерационные задачи, из постановки задачи следует, что этим пространством является пространство функций:

$$U = \{u(M) : u(M) = \sum_{r,j=1}^{\infty}\left[c_{r,j}(x,t) + \sum_{e=1}^{2} \omega^e_{r,j}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right]\exp(-\tau_r)\psi_j(y,t),$$

$$c_{r,j}(x,t)\omega^e_{r,j}(x,t) \in C^\infty(0 \le x \le 1)\times(0 \le t \le T), erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s}ds\}.$$

Вычислим действие операторов D_τ, T, L_ξ на функцию $u(M) \in U$, имеем

$$D_\tau u = \sum_{r,j=1}^{\infty}\left(-\lambda_r(t) + \lambda_j(t)\right)\left[c_{r,j}(x,t) + \sum_{e=1}^{2}\omega^e_{r,j}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right]\exp(-\tau_r)\psi_j(y,t)$$

$$Tu = \sum_{r,j=1}^{\infty}\{\partial_t c_{r,j}(x,t) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\nu,j}(t)c_{r,\nu}(x,t) + \tag{8}$$

$$+\sum_{e=1}^{2}\left[\partial_t \omega^e_{r,j}(x,t) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\nu,j}(t)\omega^e_{r,\nu}(x,t)\right] erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\}\exp(-\tau_r)\psi_j \ ;$$

$$L_\xi u = a(x)\sum_{r,j=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{2}\left[2\varphi_e'(x)\partial_x \omega^e_r(x,t) + \varphi_e''\omega^e_r(x,t)\right]\partial_{\xi_e}\left(erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right)\exp(-\tau_r)\psi_j(y,t).$$

Удовлетворим функцию $u(M)\in U$ краевым условиям из (4), предварительно разложив

$$h(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}h_j(x)\psi_j(y,0),\ \ h_j(x)=\left(h(x,y),\psi_j(y,0)\right).$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{r,j=1}^{\infty}\left[c_{r,j}(x,0)+\sum\limits_{e=1}^{2}\omega_{r,j}^{e}(x,0)\cdot 0\right]\psi_j(y,0)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}h_j(x)\psi_j(y,0),\\ \sum\limits_{r,j=1}^{\infty}\left[c_{r,j}(e-1,t)+\sum\limits_{e=1}^{2}\omega_{r,j}^{e}(e-1,t)erfc\left(\dfrac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\Big|_{\xi_e=0}\right]\exp(-\tau_r)\psi_j(y,0)=0\end{cases}$$

Отсюда, пренебрегая членом порядка $0\left(\exp\left(-\dfrac{1}{4\varepsilon t}\right)\right)$ и учитывая, что $\omega_{r,j}^{e}(x,0)$ умножается на нуль, определим

$$c_{j,j}(x,t)\big|_{t=0}=h_j(x)-\sum_{r,j=1(r\neq j)}^{\infty}c_{r,j}(x,0),\ \ \omega_{r,j}^{e}(x,t)\big|_{t=0}=p_{r,j}^{e}(x),$$

$$\omega_{r,j}^{e}(x,t)\big|_{x=e-1}=-c_{r,j}(e-1,t),\ \ r,j\geq 1, \tag{9}$$

где $p_{r,j}^{e}(x)$ – произвольная функция.

Уравнение (7_{-2}) и (7_{-1}) имеют решение в пространстве U представимое в виде

$$u_\mu(M)=\sum_{r,j=1}^{\infty}\left[c_{r,j}^{\mu}(x,t)+\sum_{e=1}^{2}\omega_{r,j}^{e,\mu}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right]\exp(-\tau_r)\psi_j(y,t),\ \ \mu=-2,-1, \tag{10}$$

Действительно, подставив функцию (10) в уравнения (7_{-2}) и (7_{-1}), на основании вычислений (8), убеждаемся в том, что она будет решением, если $c_{r,j}^{\mu}(x,t)=\omega_{r,j}^{e,\mu}(x,t)=0$, $\forall r\neq j$. Здесь функции $c_{j,j}^{\mu}(x,t)$, $\omega_{j,j}^{e,\mu}(x,t)$ произвольны.

Вычислим теперь свободный член уравнения (7_0), для чего предварительно разложим $f(x,y,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x,t)\psi_k(y,t)$, $f_k(x,t)=\left(f(x,y,t),\psi_k(y,t)\right)$ и используя вычисления (8), имеем

$$H_0(M)=f(x,y,t)e^{-\tau_1+\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}}-Tu_0(M)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,t)\psi_k(y,t)\exp\left(-\tau_1+\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\{\partial_t c_{k,k}^{-2}(x,t)e^{-\tau_k}+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c_{j,j}^{-2}(x,t)e^{-\tau_j}+\sum_{e=1}^{2}[\ \partial_t\omega_{k,k}^{l_1-2}(x,t)e^{-\tau_k}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega_{j,j}^{l_1-2}(x,t)e^{-\tau_j}\ ]erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\}\psi_k(y,t).$$

Для того, чтобы уравнения (7_0) имело решение в U, положим

$$\begin{gathered}\partial_t c_{11}^{-2}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)c_{1,1}^{-2}(x,t)=f_1(x,t)e^{\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}},\\ \partial_t c_{k,k}^{-2}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)c_{k,k}^{-2}(x,t)=0,\ \ k\geq 2\\ \partial_t\omega_{k,k}^{e_1-2}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)\omega_{k,k}^{e_1-2}(x,t)=0,\ k\geq 1\end{gathered} \tag{11}$$

Тогда $H_0(M)$ перепишется

$$H_0(M)=\sum_{k=2}^{\infty} f_k(x,t)\psi_k(y,t)\exp\left(-\tau_1+\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right)-$$
$$-\sum_{k,j=1(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\left[c_{j,j}^{-2}(x,t)+\sum_{e=1}^{2}\omega_{j,j}^{e_1-2}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right]e^{-\tau_k}\psi_j(y,t).$$

Уравнение с такой правой частью имеет решение в U и его решение представимо в виде (10) с верхним индексом $\mu=0.$ Подставим (10) в уравнение (7_0), с учетом вычислений (8), получим

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(-\lambda_k(t)+\lambda_j(t)\right)\left[c_{k,j}^{0}(x,t)+\sum_{e=1}^{2}\omega_{k,j}^{e,0}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)\right]e^{-\tau_k}\psi_j(y,t)=H_0(M).$$

из этого соотношения определим

$$c_{1,j}^{0}(x,t)=\frac{1}{\lambda_j(t)-\lambda_1(t)}\left[f_j(x,t)e^{\frac{i\theta(0)}{\varepsilon}}+\alpha_{j,1}(t)c_{j,j}^{-2}(x,t)\right],\ \forall j\geq 2$$

$$c_{k,j}^{0}(x,t)=\frac{1}{\lambda_j(t)-\lambda_k(t)}\alpha_{j,k}(t)\ c_{j,j}^{-2}(x,t),\forall k\neq j,j\geq 1,k\neq 1$$

$$\omega_{k,j}^{e,0}(x,t)=\frac{\alpha_{j,k}(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_k(t)}-\omega_{j,j}^{e_1-2}(x,t),\ \forall k\neq j,\ k,j\geq 1,$$

а функции $c_{j,j}^{0}(x,t),\ \omega_{j,j}^{e,0}(x,t)-$ произвольны.

Только при таком выборе функций $c_{k,j}^{0}(x,t),\ \omega_{k,j}^{e,0}(x,t)$ функция (10) при $\mu=0$ будет решением уравнения (7_0).

Уравнения (11) решаем при начальных условиях из (9). Отметим, что в условиях (9) функция $h_j(x)$ будет присутствовать только для функции $c_{j,j}^{0}(x,t)\big|_{t=0}$, а для остальных $c_{j,j}^{k}(x,t)\big|_{t=0}$, $k\neq 0$ она равна нулю. Полученное при этом решение

$$\omega_{k,k}^{e_1-2}(x,t)=p_{k,k}^{e_1-2}(x)\exp\left(-\int_0^t\alpha_{k,k}(s)ds\right)$$

линейно зависит от произвольной функции $p_{k,k}^{e_1-2}(x)$. Она будет определена из условия

$$L_\xi u_{-2}(M)=0. \tag{12}$$

В свободный член уравнения (7_1) войдет выражение $L_\xi u_{-2}(M)$, которое приведет к появлению секулярных членов в решении уравнения (7_1). Поэтому на каждом шаге выбором произвольной функции $p_{k,k}^{e_1-2}(x)$ будем избавляться от такого члена, как решение уравнения

$$2\varphi_e'(x)\frac{dp_{k,k}^{e_1-2}(x)}{dx}+\varphi_e''(x)p_{k,k}^{e_1-2}(x)=0$$

при начальном условии определяемом из (9). На основании (12), получим

$$p_{k,k}^{e_1-2}(x)\big|_{x=e-1}=-\exp\left(t\int_0^t\alpha_{k,k}(s)ds\right)c_{k,k}^{-2}(e-1,t),\ k\geq 1,\ e=1,2;$$

здесь t выступает как параметр.

Таким образом, однозначно определены все функции входящие в $u_{-2}(M)$ из (10).

Рассмотрим теперь остальные слагаемые свободного члена (7_1), аналогично $H_0(M)$, получим:

$$H_1(M) = -Tu_{-1}(M) = \sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{j,j}^{-1}(x,t)e^{-\tau_j} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c_{k,k}^{-1}(x,t)e^{-\tau_k} +$$
$$+\sum_{e=1}^{2}\left(\partial_t \omega_{j,j}^{e_1-1}(x,t)e^{-\tau_j} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega_{k,k}^{e_1-1}e^{-\tau_k}\right)erfc\left(\frac{\xi_e}{2\sqrt{t}}\right)]\psi_j(y,t).$$

В силу произвольности функции $c_{j,j}^{-1}(x,t),\ \omega_{j,j}^{e_1-1}(x,t)$ выберем их как решение уравнений

$$\partial_t c_{j,j}^{-1}(x,t) + \alpha_{j,j}(t)c_{j,j}^{-1}(x,t) = 0\,,$$
$$\partial_t \omega_{j,j}^{e_1-1}(x,t) + \alpha_{j,j}(t)\omega_{j,j}^{e_1-1}(x,t) = 0$$

С учетом того, что $c_{k,j}^{-1}(x,t) = \omega_{k,j}^{e_1-1}(x,t) = 0 \quad \forall k \neq j,$ начальные условия для выше приведенных уравнений будут нулевые, в том числе и для $p_{j,j}^{e,-1}(x)\Big|_{x=e-1} = 0.$ Уравнения для $c_{k,j}^{-1}(x,t)$ и $p_{j,j}^{e,-1}(x)$ однородные, поэтому их решения при нулевых начальных условиях будут тривиальными.

Далее, продолжая выше описанной процесс, определим все коэффициенты частичной суммы ряда (6), причем коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль.

Использую принцип максимума, по аналогии с работой [1], можно доказать асимптотический характер построенного решения, полученного сужением $n-$й частичной суммы ряда (6):

$$u_{\varepsilon_{2n}} x, y, t, \varepsilon) = \sum_{k=-2}^{2n} \varepsilon^{\frac{k}{2}} u_k\big(x, y, t, \theta(x,t,\varepsilon)\big) \qquad (13)$$

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены условия 1)−3). Тогда построенное решение (13) является решением исходной задачи (1), (2), т.е. для достаточно малых $\varepsilon > 0,\ \forall (x,y,t) \in \Omega \times [0,T],\ n = 0,1,2,...$ справедлива оценка

$$\left|u(x,y,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,2n}(x,y,t,\varepsilon)\right| < c\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Литература

1. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. Бишкек. 2005.−152 с.
2. Омуралиев А.С., Садыкова Д.А. Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с быстроосцилирующей правой частью // Хабарши −Вестник Казахского национального педагогического университета им. Абая. Алматы.2007. №4(20) − с.202-207.
3. Омуралиев А.С., Садыкова Д.А. Асимптотика нерезонансной сингулярно возмущенной параболической задачи. // Исслед. по интегро-дифферен. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009.– Вып. 40.

Рецензент: к.ф.-м.н. Землянский А.А.