ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА. СТРОИТЕЛЬСТВО

Зулпуев А.М.

МАТРИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УСИЛИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

A.M. Zulpuev

MATRIX CORRELATIONS BETWEEN STRESS AND DISPLACEMENT FOR SYMMETRICAL CROSS SECTION OF ELASTIC ROD

УДК: 624.012.45?624.012.35

В данной статье рассмотрена расчетная модель метода сосредоточенных деформаций для упругого стержня постоянного сечения, учитывающая связи метода перемещения, а также определения внутреннего усилия и формирования матрицы жесткости сечений, элементов и стержней систем из них.

In this paper the computational model of the method of concentrated deformations for an elastic rod of constant cross section, taking into account the communication method of travel, as well as determining the internal forces and the formation of the stiffness matrix sections, elements and systems of rods from them.

Расчет деформации и прочности в нормальных сечениях железобетонных статически определимых стержней основывается на том, что вектор сил в нормальных сечениях считается известным и не зависящим от соотношений жесткостных характеристик сечений, которые в процессе загружения могут значительно меняться, как это имеет место в железобетонных стержнях. Эти внешние силы отыскиваются в каждом сечении статически определимого стержня из уравнений равновесия отдельных частей стержневой системы после определения опорных реакций.

Для статически неопределимых стержней и систем из них внутренние силы в сечениях, на действие которых выполняется расчет прочности, должны быть найдены одним из методов решения статически неопределимых систем, причем это решение осложняется развитием неупругих деформаций в бетоне и арматуре.

Метод сосредоточенных деформаций (МСД) является одним из численных методов решения расчета статически неопределимых стержневых и плоскостных систем [1, 2, 3 и др.] здесь раскрываются вначале на стержневых упругих элементах, имеющих постоянные поперечные сечения с плоскостью симметрии, в которой действуют векторы внешних сил (рис.1); условия опира-ния по длине и на концах могут быть произвольными, в том числе и податливыми с известными характеристиками жесткости опорных устройств.

Идея метода сосредоточенных деформаций (МСД) состоит в том, что исходный стержень дели-тся на элементы, по плоскостям раздела между которыми сосредотачиваются деформации прилегающих элементов. По-другому можно сказать так: исходный деформируемый стержень делится на элементы, превращаемые в жесткие и соединенные между собой податливыми связями, характеристики податливости (жесткости) которых должны сохранять свойства исходного стержня.

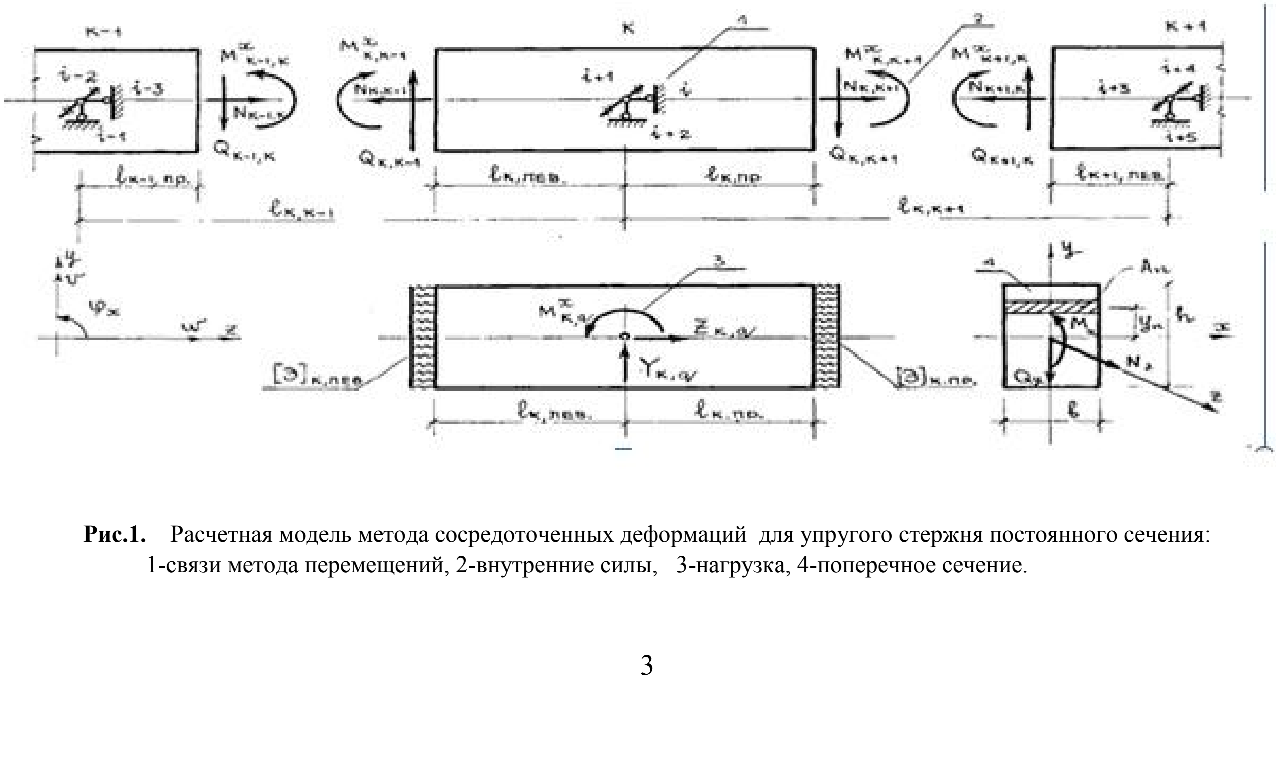

Рис.1. Расчетная модель метода сосредоточенных деформаций для упругого стержня постоянного сечения: 1-связи метода перемещений, 2-внутренние силы, 3-нагрузка, 4-поперечное сечение.

Основное достоинство метода сосредоточенных деформаций – простота формирования матриц жесткости сечений, элементов, стержней систем из них; при этом элементами матриц жесткости сечений служат балочные жесткостные характеристики, (изгибная, осевая и т.д.), сохраняющие свой смысл также и в упруго - пластической стадии работы; причем такие же жесткостные характеристики распространяются и на случай плоского напряженного состояния и изгиба в двух направлениях для упруго и неупруго работающих железобетонных плит.

Другим достоинством метода сосредоточенных деформаций является четкое деление сложного напряженно-деформированного состояния на элементарные составляющие (изгиб, сжатие-растяжение и т.д.).

Третьим достоинством метода сосредоточенных деформаций является простота учета податливых соединений между элементами или в опорных устройствах, это имеет значение при расчете сборно-монолитных или составных конструкция.

Четвертым достоинством метода сосредоточенных деформаций в развиваемом здесь варианте является широкое использование гипотезы плоских сечений. Это обстоятельство позволяет резко снизить число элементов МСД по сравнении с обычным применяемым числом конечных элементов без потери точности в описании напряженно-деформированного состояния на участках значительной протяженности.

Так для стержневых элементов закон плоского деформирования принимается единым по всей высоте поперечного сечения; в задачах о плоско – напряженном состоянии и изгибе плит законы плоского деформирования задаются едиными для каждого элемента МСД в отдельности.

Законы плоского деформирования в пределах элементов МСД совместно с нелинейными диаграммами деформирования материалов "" позволяют выявить сложный характер распределения напряжений на тех же участках.

Однако метод сосредоточенных деформаций ориентирован прежде всего на расчет элементов с учетом реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры; в этом случае необходимо, для учета меняющейся по длине жесткости, делить стержни также и при обычном варианте метода конечного элемента; поэтому в этом случае метод сосредоточенных деформаций и обычный метод конечных элементов близки между собой в смысле необходимой степени дискретизации. Вместе с тем при учете нелинейности железобетонных стержней в обычном методе конечных элементов элементы матрицы жесткости приходится отыскивать в главных центральных осях, меняющих свое положение в зависимости от уровня напряженно-деформированного состояния. В методе сосредоточенных деформаций матрицы жесткости элементов строятся непосредственно на основе матриц жесткости сечений в неизменных координатных осях без перехода к центральным осям сечений. Это обстоятельство свидетельствует о значительном достоинстве метода сосредоточенных деформаций.

Перейдем к вычислению основных соотношений метода сосредоточенных деформаций.

После разрезки исходного стержня на элементы МСД последние, как жесткие, закрепляются фиктивными связями метода перемещений.

Каждый элемент МСД закрепляется тремя связями, исключающими перемещение в направлении продольной оси, перпендикулярном ей и поворот в плоскости симметрии сечения (рис.1.).

Нормальные сечения представим в дискретной форме - набором элементарных полосовых участков с площадями A_n (рис. 1.), в пределах которых нормальные и касательные напряжения предполагаются равномерно распределенными.

Внутренние силы через напряжения записываются так:

$$N_z = \sum_n \sigma_n A_n \qquad M_x = -\sum_n \sigma_n A_n y_n \tag{1}$$

где n - номер элементарного участка A_n; y_n- координата площади A_n.

В соответствии с гипотезой плоских сечений имеем:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_o - K_x y_n \tag{2}$$

здесь - продольная деформация на уровне продольной координатной оси z,

K_x - кривизна продольной оси, отвечающая моменту M_x.

Для упругого напряженно-деформированного состояния известно соотношение

$$\sigma_n = E_n \varepsilon_n \tag{3}$$

где E_n - модуль упругости материала n-го элементарного участка.

Отсюда следует, что в каждом элементарном участке A_n может быть свой модуль упругости E_n, т.е. стержень может быть составлен из разных материалов.

Подставляя (2) в (3), а затем в (1), найдем:

$$N_z = \sum_n \sigma_n A_n \varepsilon_o - \sum_n E_n A_n K_x y_n; \qquad M_x = -\sum_n \sigma_n A_n y_n \varepsilon_o + \sum_n E_n A_n K_x y_n^2 \tag{4}$$

При переходя к интегрированию, получим при E_n =E

$$\sum_n A_n = A; \ \sum_n A_n y_n = S_x; \ \sum_n A_n y_n^2 = J_x; \qquad N_z = AE\varepsilon_o - ES_x K_x; \qquad M_x = -AES_x\varepsilon_o + EJ_x K_x; \tag{5}$$

где A - площадь поперечного сечения стержня,

S_x - статический момент площади относительно координатной оси X,

J_x - момент инерции относительно той же оси.

Целесообразно координатными осями выбирать центральные, которые одновременно в случае симметричного сечения относительно оси у сечения, будут главными; тогда S_x=0 и соотношение (5) примут вид

$$N_z = AE\varepsilon_o$$
$$M_x = EJ_x K_x \qquad (6)$$

Учтем теперь влияние поперечных сил. Угол сдвига сечения примем в виде [4].

$$\gamma_y = \chi_y Q_y / GA, \qquad (7)$$

где: χ_y - безразмерный коэффициент (коэффициент сдвига), зависящий от формы поперечного сечения, G - модуль сдвига материала

$$G = E/2(1+\mu),$$

μ - коэффициент поперечного расширения.

Из (7) следует

$$Q_y = (GA/\chi_y)\gamma_y \qquad (8)$$

Добавляя (8) к (7); получим, переходя к матричной форме записи,

Коэффициент сдвига можно записать

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EJ_x & \\ & & GA/\chi_y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2}\int_A \frac{S_x^2 dA}{в^2} \qquad (10)$$

Для многих форм поперечного сечения коэффициент χ_y вычислен; например, для прямоугольной формы сечения коэффициент χ_y = 1,2.

Заметим попутно, что коэффициент χ_y вычисляется по (10) на основании усреднения энергии сдвига. Если исходить из условия усреднения касательных напряжений по высоте, распределяющихся по параболическому закону, то для прямоугольной формы коэффициент усреднения касательных напряжений будет равен χ_y = 1,5 [4].

Добавим к этому, что влияние деформаций сдвига на перемещение, и в стержневых системах, прежде всего, несущественно, и им часто пренебрегают.

Перейдем к выводу соотношений между внутренними силами и перемещениями в элементах метода сосредоточенных деформаций.

Будем полагать, что продольные деформации - кривизны K_x и углы постоянны на длинах, равных расстояниям от плоскостей разрезки исходного стержня на элементы до мест приложения фиктивных связей метода перемещений (рис.1).

Тогда перемещения поперечных сечений элементов МСД по плоскостям разрезки будут связываться с деформациями в следующем виде

$$\omega_{К.ПР.} = \varepsilon_Z l_{К.ПР};$$
$$\varphi_{К.ПР.} = K_x l_{К.ПР}; \qquad (11)$$
$$\nu_{К.ПР.} = \gamma_Y l_{К.ПР};$$

где $\omega_{К.ПР.}$ – перемещение вдоль оси Z,

$\varphi_{К.ПР.}$ – угол поворота,

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ Q_y \end{Bmatrix}_{k_1 k+1} = \begin{bmatrix} AE & & \\ & EJ & \\ & & GA/\chi_y \end{bmatrix} * l^{-1}_{к.пр} * \begin{Bmatrix} \omega \\ \varphi \\ \nu \end{Bmatrix}_{к.пр} \qquad (12)$$

$\nu_{К.ПР.}$ – перемещение по вертикали вследствие сдвига.

Учитывая (9) и (11), запишем

или $$\{F\}_{k_1 k+1} = [C]_{к.пр} * l^{-1}_{к.пр} * \{\upsilon\}_{к.пр} \qquad (13)$$

где $\{F\}_{k_1 k+1}$ - вектор внутренних сил;

$[C]_{к.пр}$ - матрица жёсткости сечений,

$\{\upsilon\}_{к.пр}$ - вектор перемещений правого конца к-го элемента;

$[C]_{к.пр} * l^{-1}_{к.пр} = [Э]_{к.пр}$ - элементная матрица.

Из вышеизложенного следует, что получены формирования матрицы внешней жесткости сечений, элементов и стержней систем из них.

Литература:

1. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А., Кунижев В.Х., Адыракаева Г.Д. Расчет прочности и перемещений стержневых железобетонных элементов по деформированной схеме. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1987. - № 3.
2. Дроздов П.Ф., Додонов М.И., Паньшин Л.Л., Саруханян Р.Л. Проектирование и расчет многоэтажных гражданских зданий и их элементов. - М.: Стройиздат. - 1986. - 351 с.
3. Зулпуев А.М. Расчет плоско-напряженных систем в упругой стадии работы. // Научный журнал "Вестник" ОшМУ. № 23. 2010. - Ош. - 2010. - С. 244-247.
4. Сливкер В.И. К расчету нелинейно-упругих стержневых систем. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1971. - № 6. - С. 2-7.

Рецензент: д.т.н., профессор Маруфий А.Т.