Чекеев А.А., Аблабекова Ч.А.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОЙ *R*- ПАРАКОМПАКТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

A.A. Checkeev, Ch.A. Ablabekova

ON THE FUNCTIONAL UNIFORM R-PARACOMPACT UNIFORM SPACES

УДК: 515.123

Доказаны характеристики функциональной равномерной R-паракомпактных равномерных и сильно коллективно нормальных тихоновских пространств.

The characterizations of the functionally uniformly R- paracompact uniform and strongly collectivise normal Tychonojf spaces are proved.

Введение

В работе получена характеристика функциональной равномерной Д-паракомпактости ([12]) через вложения в свое Самуэловское бикомпактное расширение и, как приложение этой характеристики, описаны сильно коллективно нормальные пространства посредством их вложений в свое Стоун-Чеховское бикомпактное расширение.

Введение

В работе получена характеристика функциональной равномерной *R*-паракомпактости ([12]) через вложения в свое Самуэловское бикомпактное расширение и, как приложение этой характеристики, описаны сильно коллективно нормальные пространства посредством их вложений в свое Стоун-Чеховское бикомпактное расширение.

1. Необходимые сведения

За необходимой информацией о равномерных пространствах отсылаем читателя к книгам [1], [2], [5], [9].

Пусть X - тихоновское пространство. Через $\mathscr{U}_X$ - обозначается *универсальная* равномерность пространства X, т.е. сильнейшая равномерность пространства X, порождающая тихоновскую топологию пространства X ([4]). Подмножество $V \in X$ называется *функционально открытым* или *конуль-множеством* ([4]), если $V = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ для некоторой непрерывной (ограниченной) функции $f = X \to \mathbb{R}$. Покрытие, состоящее из конуль-множеств, называется *функционально открытым* и все функционально открытые множества образуют базу топологии тихоновского пространства ([4]).

Определение 1.1 ([3]). Тихоновское пространство X называется *сильно коллективно нормальным*, если универсальная равномерность $\mathscr{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий пространства X.

Определение 1.2 ([6]). Покрытие α равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно локально конечным*, если существует равномерное покрытие $\beta \in \mathscr{U}$, каждый элемент которого пересекается лишь конечным числом элементов покрытий α.

Определение 1.3 ([6]). Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется *равномерно R – паракомпактным*, если в любое открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

Определение 1.4 ([7], [8]). Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ называется *равномерно открытым*, если существует такое равномерно непрерывеное отображение $f:(X,\mathcal{U}) \to (M, \mathcal{U}_\rho)$, где $\mathcal{U}_\rho$ - метрическая равномерность метрического пространства (M, ρ), что $O = f^{-1}(U)$ для некоторого открытого множества $U \subset M$.

Предложение 1.5 ([12]). *Тихоновское пространство X сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий.*

Определение 1.6 ([12]). Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется *функционально равномерно R-паракомпактным*, если в любое равномерно открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие.

Предложение 1.7 ([12]). *Тихоновское пространство X сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(X, \mathcal{U}_X)$ - функционально равномерно R- паракомпактно.*

Теорема 1.8 ([12]). *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ функционально R - паракомпактно тогда и только тогда, когда для любого равномерно открытого покрытия α покрытие $\alpha^{\angle} = \{\cup\alpha' : \alpha' \subset \alpha$ и α' – конечно$\}$ есть равномерное покрытие, т. е. $\alpha^{\angle} \in \mathcal{U}$.*

Через βX - обозначается, традиционно, Стоун-Чеховское расширение пространства X ([4]). Для максимальной или Чеховской, предкомпактной равномерности $\mathcal{U}_\beta$ имеем $\mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{U}_X$ и $\mathcal{U}_\beta$- имеет базу, состоящую из всех конечных функционально открытых покрытий и пополнение $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}}_\beta)$ есть в точности βX ([4]).

На тихоновском пространстве X также определена равномерность в терминах окружений диоганали $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Пусть $\mathcal{D}_X$ множество всех подмножеств $X \times X$ таких, что $\Delta \subset U$ для любого $U \in \mathcal{D}_X$. *Равномерность* в терминах *окружений* диоганали Δ пространства X есть подсемейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$, которое удовлетворяет следующим условиям:

(v_1) Если $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

(v_2) Если $V \in \mathcal{U}$ и $V \subset U \in \mathcal{D}_X$, то $U \in \mathcal{U}$

(v_3) Для любого $U \in \mathcal{U}$ существует $V \in \mathcal{U}$ такое, что $V \circ V \subset U$, где

$V \circ V = \{(x,y) : (x,z) \in V$ и $(z,y) \in V$ для некоторого $z \in X\}$.

(v_4) Если $U \in \mathcal{U}$, то $U^{-1} \in \mathcal{U}$, где $U^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in U\}$

(v_5) $\cap\mathcal{U} = \cap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \Delta$.

Каждый элемент $U \in \mathcal{U}$ называется *окружением* диоганали и для любого равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ через $(sX, s\mathcal{U})$ или $s_u X$ обозначается Самуэловское бикомпактное расширение ([2]).

2. Основные результаты

Следующее предложение являются обоснованием для введения определения 1.1.

Предложение 2.1 . *Тихоновское пространство* X *сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда все окрестности диоганали* $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ *образуют равномерность.*

Доказательство. Пусть X сильно коллективно нормально, т. е. $\mathcal{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий и $\mathcal{V}_X$ - семейство, состоящее из всех окрестностей диоганали. Для каждого равномерного покрытия $\alpha\in\mathcal{U}_X$ положим $U_\alpha=\cup\{A\times A:A\in\alpha\}$. Тогда семейство $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{U}_X\}$ - базу некоторой равномерности $\mathcal{W}_X$. Покажем, что $\mathcal{W}_X=\mathcal{V}_X$. Пусть $U\in\mathcal{V}_X$ - произвольная открытая окрестность диоганали Δ .Тогда покрытие $\alpha_U=\{U[x]:x\in X\}$ открытое покрытие X , где $U[x]=\{y:(x,y)\in U\}$. Тогда $\alpha_U\in\mathcal{U}_X$. Пусть $\beta\in\mathcal{U}_X$ такое открытое покрытие, что β вписано в α_U. Тогда $U_\beta=\cup\{B\times B:B\in\beta\}\in\mathcal{W}_X$ и $U_\beta\subset U$, следовательно $\mathcal{V}\in\mathcal{W}_X$, т.е. $\mathcal{V}_X\subseteq\mathcal{W}_X$. С другой стороны очевидно, что $\mathcal{W}_X=\mathcal{V}_X$. Итак, $\mathcal{V}_X=\mathcal{W}_X$ и все окрестности диоганали Δ образуют равномерность.

Обратно, пусть $\mathcal{V}_X$ - все окрестности диоганали образуют равномерность. Покажем, что все открытые покрытия пространства X образуют равномерность $\mathcal{U}_X$. Семейство, $\{\alpha_U:U\in\mathcal{V}_X\}$ где $\alpha_U=\{U[x]:x\in X\}$, образуют базу некоторой равномерности $\mathcal{W}_X$. Пусть α' – произвольное открытое покрытие X. Тогда $U_\alpha=\cup\{A\times A:A\in\alpha\}$- открытая окрестность диоганали Δ , следовательно $U_\alpha\in\mathcal{V}_X$. Тогда существует $V\in\mathcal{V}_X$ такое, что $V\circ V\subset U_\alpha$, т. е. покрытие $\alpha_V=\{V[x]:x\in X\}$ вписано в α, т. е. $\mathcal{W}_X$ - состоит из всех открытых покрытий и ясно, что $\mathcal{W}_X=\mathcal{U}_X$.

Следующая теорема является аналогом теоремы типа Тамано ([13]). и аналогом теоремы Райса ([6]) для функционального равномерно R- парокомпактостных пространств.

Теорема 2.2. *Равномерное пространство* $(X,\mathcal{U})$ *функционально равномерно R - паракомпактно тогда и только тогда, когда для любого биокомпакта* $B\subseteq s_uX\setminus X$ *существует равномерно открытое покрытие* $\alpha\in\mathcal{U}$ *такое, что* $B\cap[A]_{s_uX}=\varnothing$ *для любого* $A\in\alpha$.

Доказательство. Пусть $(X,\mathcal{U})$- функционально равномерно R- парокомпактное пространство и $B\subseteq s_uX\setminus X$ - произвольный биокомпакт. Тогда для любой точки $x\in X$ существует равномерно открытая окресность V_x такая, что $Ex_uV_X\subset[V_X]_{s_uX}$ и $[V_X]_{s_uX}\cap B=\varnothing$, где $Ex_uV_X=s_uX\setminus[X\setminus V_X]_{s_uX}$ - наибольшее открытое множество в s_uX со следом V_x, т. е. $Ex_uV_X\cap X=V_X$. Покрытие $\gamma=\{V_X:x\in X\}$ равномерно открыто, следовательно, в силу теоремы 1.8, $\gamma^{\angle}$ - равномерное покрытие, т. е. $\gamma^{\angle}\in\mathcal{U}$. Конечное объединение равномерно открытых множеств равномерно открыто ([7] [8]), следовательно покрытие $\alpha = \gamma^{\angle}$ - равномерно открыто. Пусть $A \in \alpha$ произвольный элемент, тогда A имеет вид $A = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, где $V_{x_i} \in \gamma$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\left[V_{x_i}\right] \cap B = \varnothing$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\left[\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}\right] \cap B = \varnothing$ т.е. $[A]_{s_u X} \cap B = \varnothing$ для любого $A \in \alpha = \gamma^{\angle}$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы и α - произвольное равномерно открытое покрытие равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$. Покажем, что $\alpha^{\angle} \in \mathscr{U}$ при выполнении условия теоремы.

Согласно работам [10] [11], для любого $A \in \alpha$, $Ex_u A$ - базовое открытое множество в $s_u X$ и $Ex_u A \cap X = A$. Тогда $U = \cup\{Ex_u A : A \in \alpha\} \supset X$ и U - открыто в $s_u X$ и $X \subset U \subset s_u X$. Множество $B = s_u X \setminus U \subset s_u X \setminus X$ - является бикомпактом в $s_u X \setminus X$. По условию теоремы существует равномерно открытое покрытие $\gamma \in \mathscr{U}$ такое, что $[\Gamma]_{s_u X} \cap B = \varnothing$ для любого $\Gamma \in \gamma$ имеем $[\Gamma]_{s_u X} \subset s_u X \setminus B \subset U$ и $[\Gamma]_{s_u X}$ - биокомпакт. Следовательно, найдутся $A_1^{\Gamma}, A_2^{\Gamma}, \ldots, A_n^{\Gamma} \subset \alpha$ такие, что $[\Gamma]_{s_u X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_{X_u} A_{X_i}^{\Gamma}$. Тогда $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{\Gamma} \in \alpha^{\angle}$. Это означает, что равномерное покрытие $\gamma \in \mathscr{U}$ вписано в $\alpha^{\angle}$, т. е. $\alpha^{\angle} \in \mathscr{U}$. Итак, $(X, \mathscr{U})$ - функционально равномерно R- парокомпактно.

В качестве приложения теоремы 2.2. для тихоновских пространств получим характеристику сильно коллективно нормальных пространств в духе теорем Тамано ([13]).

Теорема 2.3. *Тихоновское пространство* X *сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда для любого биокомпакта* $B \subseteq \beta X \setminus X$ *существует функционально открытое покрытие* α *пространства* X *такое, что* $B \cap [A]_{\beta X} = \varnothing$ *для любого* $A \in \alpha$.

Доказательство. Если тихоновское пространство X - сильно коллективно нормально, то, в силу предложения 1.7, $(X, \mathscr{U}_X)$ - функционально равномерно R- паракомпактно. Тогда $s_{u_X} X = \beta X$ и, в силу теоремы 2.2, для любого бикомпакта $B \subset \beta X \setminus X$ найдется функционально открытое покрытие $\alpha \in \mathscr{U}_X$ такое, что $B \cap [A]_{\beta X} = \varnothing$ для любого $A \in \alpha$.

Обратно, если выполнено условие теоремы, что равномерное пространство $(X, \mathscr{U}_X)$ - функционально равномерно R- паракомпактно. Тогда, в силу предложения 1.7, тихоновское пространство X - сильно коллективно нормально.

Литература:

1. Энгелькинг Р. Общая топология.- М.: Мир, 1986.
2. Isbell J. R. Uniform spaces. - Providence, 1964.
4. Gillman H., Jerison M. Ring of continuons functions. Princeton, 1960.
5. Келли Дж. Jl. Общая топология. - М.: Наука, 1981.
6. Rice M. D. A note on uniform paracompactness // Proc. Amer. Math. Soc. (2) 62 (1977) pp. 359-362.
7. Charalambous M. G. Uniform Dimension Function//Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.
8. Charalambous M. G. A new covering dimension function for uniform spaces. // J. London Math. Soc. 1975. v 11 (2). p. 137-143.
9. Борубаев А. А., Чекеев А. А. Равномерные пространства. Бишкек, 2003.
10. Чекеев А. А., Абдраимова М. О строении и модели Самуэловских бикомпактных расширений (1.СТРОЕНИЕ)// Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, 2011 г.
11. Чекеев А. А., Абдраимова М О строении и модели Самуэловских бикомпактных расширений (П.МОДЕЛЬ.)// Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, 2011 г.
12. Чекеев А. А, Аблабекова Ч. А. О сильной нормальности тихоновских и равномерных пространств// Вестник КазНУ, 2011г. (в печати)
13. Tamano H. On compactiffications // J. Math. Kyoto Univ. 1-2 (1962) 162-193.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Болжиев Б.А.