Абдукаримов А.М.

О КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

A.M. Abdukarimov

ON THE SQUARE INTEGRABLE SOLUTION LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE ON INFINITE DOMAIN

УДК: 517.966.2

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы квадратичной интегрируемости решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается квадратичная интегрируемость решений на бесконечной области для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра.

In works [1-3] questions of square-law integrability of decisions on infinite area of the integrated and integro-differential equations on a half shaft have been considered.

In this article square-law integrability of decisions on infinite area for the two-dimensional integrated equations of type of Volterra is studied.

Рассмотрим уравнение

$$c(t,x)u(t,x)+\int_0^t K_1(t,x)A(t,x,s)K_1(s,x)u(s,x)ds+\int_0^x K_1(t,x)B(t,x,y)K_1(t,y)u(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K_1(t,x)K(t,x,s,y)K_1(s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G, \tag{1}$$

с условиями

$$u(0,x)=0, \qquad x\in[0,\ +\infty),$$

$$u(t,0)=0, \qquad t\in[0,\ +\infty), \tag{*}$$

где $A(t,x,s),B(t,x,y),K(t,x,s,y),K_1(t,x),c(t,x),f(t,x)$ – известные функции, а $u(t,x)$ – неизвестная функция.

$$f(t,x)\in L_2(G)\cap C(G) \tag{f}$$

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $c(t,x),K_1(t,x)\in C(G)$, $K_1(t,x)\ge 0$, $c(t,x)\ge\alpha>0$ при $(t,x)\in G$;

б) функции $A(t,x,s)$, $A'_t(t,x,y)$, $A'_s(t,x,s)$ $A''_{ts}(t,x,y)\in C(G_1)$, $G_1=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty, 0\le x<\infty\}$, $A(t,x,0)\ge 0$ и $A'_t(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $A'_s(t,x,s)\ge 0$ и $A''_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $K_1(t,x)\in C(G)$;

в) функции $B(t,x,y)$, $B'_x(t,x,y)$, $B'_y(t,x,y)$, $B''_{xy}(t,x,y)\in C(G_2)$, $G_2=\{(t,x,y)/0\le t<\infty,\quad 0\le y\le x<\infty\}$, $B(t,x,0)\ge 0$ и $B'_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$; $B'_y(t,x,y)\ge 0$ и $B''_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

г) функции $K(t,x,s,y)$, $K'_t(t,x,s,y)$, $K'_x(t,x,s,y)$, $K''_{tx}(t,x,s,y)$, $K'_s(t,x,s,y)$, $K'_y(t,x,s,y)$, $K''_{ty}(t,x,s,y)$, $K''_{ts}(t,x,s,y)$, $K''_{sy}(t,x,s,y)$, $K'''_{tys}(t,x,s,y)$, $K'''_{xys}(t,x,s,y)$, $K^{(IV)}_{txsy}(t,x,s,y)\in C(G_3)$, $G_3=\{(t,x,s,y)/0\le s\le t<\infty,\ 0\le y\le x<\infty\}$, $K'_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K'_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при

$(t,x,s)\in G_1$, $K(t,x,0,0)\ge 0$, $K_t'(t,x,0,0)\le 0$, $K_x'(t,x,0,0)\le 0$, $K_{tx}''(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ $K_{sy}''(t,x,s,y)\ge 0$, $K_{xys}'''(t,x,s,y)\le 0$, $K_{tys}'''(t,x,s,y)\le 0$, $K_{txsy}^{(IV)}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

д) $K^2(t,x,0,0)-A_t'(t,x,0)B_x'(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $sy(K_{sy}''(t,x,s,y))^2-A_{ts}''(t,x,s)B_{xy}''(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$, то уравнение (1) имеет единственное решение в $L_2(G)\cap C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности всех известных функций в (1) следует, что это уравнение имеет непрерывное решение $u(t,x)$.

Обе части уравнения (1) умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{tx}=\{(s,y):0\le s\le t,\ 0\le y\le x\}$. Тогда

$$\int_0^t\int_0^x c(s,y)(u(s,y))^2\,dsdy+\int_0^t\int_0^x\int_0^s K_1(s,y)A(s,y,\tau)K_1(\tau,y)u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dyds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y K_1(s,y)B(s,y,z)K_1(s,z)u(s,z)u(s,y)\,dzdyds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K_1(s,y)K(s,y,\tau,z)K_1(\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)\,dyds. \qquad (2)$$

Введем обозначение

$u_1(t,x)=K_1(t,x)u(t,x),\quad (t,x)\in G$

при помощью которого перепишем (2) в следующем виде

$$\int_0^t\int_0^x u(s,y)u_{sy}(s,y)\,dsdy+\int_0^t\int_0^x c(s,y)(u(s,y))^2\,dsdy+\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y)\,d\tau dyds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y B(s,y,z)\,u_1(s,z)u_1(s,y)\,dzdyds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)\,dyds. \qquad (2')$$

Далее пользуясь формулами $\mathrm{KWW}_s'=\frac{1}{2}(KW^2)_s'-\frac{1}{2}K_s'W^2$, и интегрирования по частям и формулой Дирихле, преобразуем левую часть соотношения $(2')$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y)\,d\tau dyds=-\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right)d\tau u_1(s,y)\,dyds=$$
$$=\int_0^t\int_0^x A(s,y,0)\left(\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right)u_1(s,y)\,dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s A_\tau'(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right)u_1(s,y)\,d\tau dyds=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x A(t,y,0)\left(\int_0^t u_1(\xi,y)\,d\xi\right)^2dy-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A_s'(s,y,0)\left(\int_0^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right)^2dyds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A_\tau'(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u_1(\xi,y)\,d\xi\right)^2dyd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t A_{\tau s}''(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)\,d\xi\right)^2dsdyd\tau.$$

Применив формулу Дирихле, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s A(s,y,\tau)u_1(\tau,y)u_1(s,y)\,d\tau dyds=\frac{1}{2}\int_0^x A(t,y,0)\left(\int_0^t u_1(\xi,y)d\xi\right)^2 dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_s(s,y,0)\left(\int_0^s u_1(\xi,y)d\xi\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x A'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u_1(\xi,y)d\xi\right)^2 dyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s A''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u_1(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dyds. \qquad (3)$$

Аналогично этому получим для третьего слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y B(s,y,z)u_1(s,z)u_1(s,y)\,dzdyds=\frac{1}{2}\int_0^t B(s,x,0)\left(\int_0^x u_1(s,v)dv\right)^2 ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x B'_y(s,y,0)\left(\int_0^y u_1(s.v)dv\right)^2 dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x B'_z(s,x,z)\left(\int_z^x u_1(s,v)dv\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y B''_{zy}(s,y,\tau)\left(\int_z^y u_1(s,v)dv\right)^2 dzdyds. \qquad (4)$$

Для преобразования десятого интеграла используем следующую формулу

$$C\nu''_{\tau z}=(C\nu)''_{\tau z}-(C'_\tau\nu)'_z-(C'_z\nu)'_\tau+C''_{\tau z}\nu$$

при $\nu(\mathrm{s,y},\tau,\mathrm{z})=\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi$.

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u_1(\tau,z)u_1(s,y)\,dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi\right)dzd\tau\times$$

$$\times u_1(s,y)dyds=\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s\int_0^y\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(K(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi\right)dzd\tau-\right.$$

$$-\int_0^s\int_0^y\frac{\partial}{\partial z}\left(K'_\tau(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi\right)dzd\tau-\int_0^s\int_0^y\frac{\partial}{\partial\tau}\left(K'_z(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\tau\right)dzd\tau+$$

$$\left.+\int_0^s\int_0^y K''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi dzd\tau\right]u_1(s,y)dyds=\int_0^t\int_0^x K(s,y,0,0)\left(\int_0^s\int_0^y u_1(\xi,v)dvd\xi\right)u_1(s,y)dyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u_1(\xi,v)dvd\xi\; u_1(s,y)dzdyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'_z(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi\; u_1(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u_1(\xi,v)dvd\xi u_1(s,y)dzd\tau dyds.$$

Далее используя, формулу

$$C\nu\nu''_{sy}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{sy}-\frac{1}{2}\left(C'_s\nu^2\right)'_y-\frac{1}{2}\left(C'_y\nu^2\right)'_s+\frac{1}{2}C''_{sy}\nu^2-C\nu'_y\nu'_s$$

и формулу Дирихле, получим

Литература:

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Искандаров С. О квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейной системы интегральных уравнений типа Вольтерра //Тез. докл. молодых ученых Акад. наук Киргиз. ССР на науч. конф., поев. 60-летию образования СССР. - Фрунзе: Илим, 1982. - С. 133-134.
3. Асанов А., Абдукаримов А.М. Квадратичная интегрируемости решений систем двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными не неограниченных областях //Вест. КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. -2004. -№1 (40). - С.48-58.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.