Жуаспаев Т.А.

ПОТОКОВАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В МАТЕРИАЛЕ

T.A. Zhuaspaev

FLUX SWEEPING FOR THE INVERSE PROBLEM OF HEAT DISTRIBUTION IN MATERIAL

УДК:519. 62: 624. 131

В работе изучается обратная задача распространения тепла в неоднородной среде. Выводится расчетные формулы решения поставленной задачи методом потоковой прогонки.

This work studies the inverse problem of heat propagation in a heterogeneous environment. We derive formulas to solve this problem by streaming sweep.

1. Постановка задачи

В области $Q = (0, H) \times (0, T)$ изучается кондуктивное распространение тепла /1-2/

$$\gamma_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=0} = T_1, \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\Big|_{z=H} + \alpha(\theta - T_b)\big|_{z=H} = 0 \tag{2}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(z), \quad 0 \le z \le H, \quad \theta\big|_{z=H} = \theta_1(t), \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

Система (1)-(3) описывает процесс распространения тепла от внутренней стороны материала, точка $z=0$ до внешней стороны материала, точка z=H. Ось 0z направлена вертикально вверх. Условие $\theta(0,t) = T_1$ означает, что на внутренней стороне материала температура остается постоянной. Второе условие (2) выражает закон сохранения тепла на внешней стороне материала. Где $T_b = T_b(t)$ - температура внешней среды. Условие (3) – распределение температуры в начальный момент времени грунта вдоль оси 0z, от 0 до H. Кроме этого считаем, что на внешней стороне материала задается температура материала. Т.е.:

$\theta(H,t) = \theta_1(x), \quad t \in (0,T)$

<u>Задача.</u> Используя уравнение (1) и начально-граничных условий (2)-(3) определить коэффициент теплопроводности материала λ. В этом разделе рассматривается самый простейший случай, когда коэффициент теплопроводности является постоянным вдоль оси 0z, от 0 до H. Физически это означает, что в рассматриваемой материал является однородным.

Отрезок (0,H) разбиваем на N равных частей с шагом $h = \frac{H}{N}$; а отрезок (0,T) разбиваем на m равных частей с шагом $\Delta t = \frac{T}{m}$. В итоге получится сеточная область:

$Q_N^m = \{X = ih; i = 0,1,\dots,N; Y = J\Delta t; J = 0,1,\dots,m\}$

В сеточной области Q_N^m изучается разностная задача.

$$\gamma_0 c Y_{i\bar{t}}^{J+1} = (\lambda Y_{i,z}^{J+1})_{\bar{z}}, \quad i=1,2,\dots,N-1; \quad J=0,1,\dots,m-1 \tag{4}$$

$$Y_0^{J+1} = 0, \quad \lambda Y_{N\bar{z}}^{J+1} + \alpha(Y_N^{J+1} - T_b(t_{j+1})) = 0 \quad J=0,1,\dots,m-1 \tag{5}$$

$$Y_i^0 = \theta_0(z_i), \quad z_i = ih; \quad i=0,1,\dots,N \tag{6}$$

В работе /3/ нами была получена сопряженная задача

$$\gamma_0 c U_{\bar{t}} + (\lambda \overline{U}_z)_{\bar{z}} = 0 \tag{7}$$

$$U_i^m = 0, \quad U_0^J = 0, \quad \lambda U_{N,\bar{z}}^{J+1} = -2(Y_N^{J+1} - \theta_1(t_{J+1})) \tag{8}$$

Коэффициент теплопроводности определяется по формуле

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \beta_n \sum_{i,j} Y_{\bar{z}}^{j+1} U_{\bar{z}}^{j} h\Delta t$$

2. Потоковая прогонка для прямой разностной задачи

Чтобы вычислить градиент функционала мы обязаны найти $Y_{i,\bar{z}}^{j+1}$ и $U_{\bar{z}}^{J}$ программным путём /3/. Будем определять поток температуры, для этого систему (4) перепишем в виде

$$A_i\left(Y_{i-1}^{j+1} - Y_i^{j+1}\right) - A_{i+1}\left(Y_{i-1}^{j+1} - Y_i^{j+1}\right) - d_i Y_i^{j+1} = -f_i \text{, i=1,2,…,N-1.}$$

Введем функцию (поток) $P_{i-1}^{j+1} = A_i\left(Y_{i-1}^{j+1} - Y_i^{j+1}\right)$, тогда система (4) имеет следующий вид $P_{i-1}^{j+1} - P_i^{j+1} - Y_i^{j+1} d_i = -f_i$ i=1,2,..,N-1. Из равенства $P_i^{j+1} = A_{i+1}\left(Y_i^{j+1} - Y_{i+1}^{j+1}\right)$ найдем, $Y_{i+1}^{j+1} = Y_i^{j+1} - \frac{P_i^{j+1}}{A_{i+1}}$.

Подставляем его в $Y_{i+1}^{j+1} = \overline{\alpha} Y_i^{j+1} + \overline{\beta}_i$ тогда $Y_i^{j+1} - \frac{P_i^{j+1}}{A_{i+1}} = \overline{\alpha}_i Y_i^{j+1} + \overline{\beta}_i$ отсюда получаем соотношение $\left(1-\overline{\alpha}_i\right) A_{i+1} Y_i = P_i + \overline{\beta}_i A_{i+1}$.

Принимая обозначения $\left(1-\overline{\alpha}_i\right)A_{i+1} = \alpha_i$, $\overline{\beta}_i A_{i+1} = \beta_i$ перепишем его следующим образом

$$\alpha_i Y_i^{j+1} = P_i^{j+1} + \beta_i \tag{9}$$

Из уравнения потока $P_{i-1}^{j+1} - P_i^{j+1} - Y_i^{j+1} d_i = -f_i$ определяется $Y_i^{j+1} = \frac{P_{i-1}^{j+1} - P_i^{j+1} + f_i}{d_i}$ и подставляем его в (9) тогда $\alpha_i P_{i-1}^{j+1} - \alpha_i P_i^{j+1} + \alpha_i f_i = \left(P_i + \beta_i\right) d_i$

или

$$P_i^{j+1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} P_{i-1}^{j+1} + \frac{\alpha_i f_i - \beta_i d_i}{\alpha_i + d_i} \tag{10}$$

с помощью этой формулы определяются все P_i^{j+1}, i=1,2,…,N-1. Надо определить начальное условие для P_i^{j+1}. Для этого положим i=0 в (9), тогда $\alpha_0 Y_1^{j+1} = P_0^{j+1} + \beta_0$. Отсюда определяется

$$P_0^{j+1} = \alpha_0 Y_1^{j+1} - \beta_0 \tag{11}$$

Соответственно используя (10) и (11) программным путём определяется P_i^{j+1}, i=1,2,…,N-1. Чтобы получить рекуррентную формулу для определения α_i, β_i, преобразуется формула

(12)

Из скалярной $\alpha_i = \left(1-\overline{\alpha}_i\right)A_{i+1}$ прогонки /4/, имеем $\overline{\alpha}_i = \frac{A_{i+2}}{d_{i+1} + A_{i+1} + A_{i+2} - A_{i+2}\alpha_{i+1}}$ отсюда

$$1-\overline{\alpha}_i = 1 - \frac{A_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + A_{i+2} - A_{i+2}\overline{\alpha}_{i+1}} = \frac{d_{i+1} + A_{i+2}\left(1-\overline{\alpha}_{i+1}\right)}{d_{i+1} + A_{i+1} + A_{i+2}\left(1-\overline{\alpha}_{i+1}\right)} = \frac{d_{i+1} + d_{i+2}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}}$$

подставляя его в (12) получим

$$\alpha_i = A_{i+1}\frac{d_{i+1} + \alpha_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}} \tag{13}$$

С учетом рекуррентного соотношения $\overline{\beta}_i = \dfrac{A_{i+1}\overline{\beta}_{i+1} + f_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + A_{i+2}\left(1-\overline{\alpha}_{i+1}\right)}$ преобразуется $\beta_i = A_{i+1}\overline{\beta}_i$, то есть

$$\beta_i = A_{i+2}\frac{A_{i+2}\overline{\beta}_{i+1} + f_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + A_{i+2}\left(1-\overline{\alpha}_{i+1}\right)} = \frac{\beta_{i+1} + f_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}} \qquad (14)$$

Приступим к определению начальных условий для формул (13) и (14). Для этого второе уравнение (5) умножаем на A_N и перепишем его в виде

$$A_N\left(\frac{1}{1+E} - 1\right)Y_{N-1}^{j+1} - A_N\left(Y_{N-1}^{j+1} - Y_N^j\right) + A_N\frac{E}{1+E}T_b = 0$$

Используя определение, поток температуры, последнее неравенство записывается в виде

$$\frac{A_N E}{1+E}Y_{N-1}^{j+1} - P_{N-1} + A_N\frac{E}{1+E}T_b = 0$$

Сравнивая его с равенством $\alpha_i Y_i = P_i + \beta_i$ при i=N-1 получим

$$\alpha_{N-1} = \frac{A_N E}{1+E}, \quad \beta_{N-1} = \frac{A_N E}{1+E}T_b$$

Присоединяя их к формулам (13) и (14) получим расчетную схему:

$$\alpha_i = A_{i+1}\frac{d_{i+1} + \alpha_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}} : \mathrm{i = N-2, N-3,...,0} \quad \alpha_{N-1} = \frac{A_N E}{1+E}$$

$$\beta_i = A_{N-1}\frac{\beta_{i+1} + f_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}} : \mathrm{i = N-2, N-3,...,} \quad \beta_{N-1} = \frac{A_N E}{1+E}T_b$$

Поток температуры определяется по следующей формуле

$$\begin{cases} P_i^{j+1} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i}P_{i-1}^{j+1} + \dfrac{\alpha_i f_i - \beta_i d_i}{\alpha_i + d_i} : i = 1,2,...,N-1 \\ P_0^{j+1} = \alpha_0 Y_0^{j+1} - \beta_0 \end{cases}$$

Используя α_i, β_i можно определить $Y_i^{j+1} : i = 1,2,...,N$. Для этого из формулы $\left(1-\overline{\alpha}_i\right)A_{i+1} = \alpha_i$, $\overline{\beta}_i A_{i+1} = \beta_i$ определяется $\overline{\alpha}_i = 1 - \dfrac{\alpha_i}{A_{i+1}}$, $\overline{\beta}_i = \dfrac{\beta_i}{A_{i+1}}$ и подставляются в $Y_{i+1}^{j+1} = \overline{\alpha}Y_i^{j+1} + \overline{\beta}_i$, тогда

$$Y_{i+1}^{j+1} = \left(1 - \frac{\alpha_i}{A_{i+1}}\right)Y_i^{j+1} + \frac{\beta_i}{A_{i+1}}; i = 1,2,...,N-1, \quad Y_0^{j+1} = T_0.$$

Этой формулой можно пользоваться при $A_{i+1} >> 1$. Если коэффициенты $A_{i+1} << 1$, то

$$Y_{i+1}^{j+1} = \frac{d_{i+1} + \alpha_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}}Y_i^{j+1} + \frac{\beta_{i+1} + f_{i+1}}{d_{i+1} + A_{i+1} + \alpha_{i+1}} : i = 1,2,...,N-1$$

$$Y_0^{j+1} = T_0$$

Аналогичным образом получается расчетная формула потоковой прогонки для сопряженной задачи (7)-(9).

Литература:

1. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения).геМ.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI стр. 153-192.
2. Чудновский А.Ф.Теплобмен в дисперсных средах. - М. Гостехиздат, 1954, 444 с

3 Рысбайулы Б., Маханбетова Г.И. Разностная схема для обратной задачи кондуктивного распространения тепла в однородной среде // ДАН РК, 2008, № 1 , ст. 15-18.
4 Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.