Жумалиев Т.Ж.

О μ- ПОЛНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

T.J. Jumaliev

ON THE μ - COMPLETE MAPPING

УДК: 515.12

В этой статье изучаются й- полнота и у,- пополнение равномерно непрерывных отображений, а также их свойства.

Regular spaces u-completeness and u-completion as well as regular representation of reflection and invariants, in this article.

Приводим некоторые необходимые для дальнейшего изложения понятия топологических и равномерных пространств.

Пусть (X, U)- равномерное пространство, а $\mathcal{F}$- фильтр в X. Фильтр $\mathcal{F}$ называется фильтром Коши в (X, U), если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in U$.

Пусть (X, τ)- топологическое пространство. Фильтр $\mathcal{F}$ в X называется фильтром окрестностей точки x в (X, τ), если внутренность каждого элемента фильтра $\mathcal{F}$ содержит точку x. Говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ сходится в (X, τ) к точке x, если $\mathcal{F}$ сильнее, чем фильтр окрестностей точки x, т.е. любой элемент фильтра $\mathcal{F}$ является окрестностью точки x. Фильтр $\mathcal{F}$ в равномерном пространстве (X, U) называется сходящимся к точке $x \in X$, а точка x- пределом фильтра$\mathcal{F}$, если он сходится к точке $x \in X$ в (X, τ_U). Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения фильтра $\mathcal{F}$ в (X, U), если x является точкой прикосновения каждого элемента фильтра $\mathcal{F}$ в (X, τ_U), где (X, τ_U)-топологическое пространство, порожденное равномерным пространством(X, U).

Равномерное пространство называют полным, если всякий фильтр Коши в нем сходится.

Пусть(X, U)- произвольное равномерное пространство а μ- некоторое кардинальное число. Через $\omega(U)$ обозначим вес равномерного пространства (X, U).,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А.А. Борубаев). Равномерное пространство (X, U)называется μ- полным, если всякий фильтр Коши $\mathcal{F}$, имеющий базуB мощностью $|B| \leq \mu$ сходится, где$\tau = \omega(U)$ и $\aleph_0 \leq \mu \leq \tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А.А. Борубаев). Равномерное пространство $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$называется μ- пополнением равномерного пространства (X, U), если:

1) $X \subset \tilde{X}_\mu$;
2) (X, τ_U) всюду плотно в$(\tilde{X}_\mu, \tau_{\tilde{U}_\mu})$;
3) $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$- μ- полное равномерное пространство.

О μ- полноте и μ- пополнении равномерных пространств, было изучено и исследовано статье [4]. Рассмотрим о μ- полноте и μ- пополнении равномерно непрерывных отображений.

Пусть $f: (X, U) \to (Y, V)$ - равномерно непрерывное отображение. Если $\mathcal{F}$ фильтр Коши, имеющий базуB мощностью $|B| \leq \mu$ в (X, U), то $f\mathcal{F} = \{fF: F \in \mathcal{F}\}$является фильтром Коши имеющий базу, мощностью

$\le \mu в(Y,V)$. База фильтра Коши $f\mathcal{F}$ мощностью $\le \mu$, сходится к точке $y \in Y$, если для всякой окрестности O_yточки yнайдется $fF \in f\mathcal{F}$ такой, что $fF \subset O_y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А.А. Борубаев). Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображениеравномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V)называетсяμ- полным, если всякий фильтр Коши $\mathcal{F}$, имеющий базу мощностью $\le \mu в(X,U)$, для которого $f\mathcal{F}$ сходится в (Y,V), сходится в (X,U).

Рассмотрим следующий квадрат категории *Unif*:

$$\begin{array}{ccc} (X,U) & \xrightarrow{i_X} & (\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu) \\ f\downarrow & & \downarrow \hat{f}_\mu \\ (Y,V) & \xrightarrow{i_Y} & (\hat{Y}_\mu,\hat{V}_\mu), \end{array}$$

где $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ и $(\hat{Y}_\mu,\hat{V}_\mu)$- μ- пополнения равномерных пространств(X,U) и (Y,V), соответственно, $\hat{f}_\mu$- равномерно непрерывное продолжение f на $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ и $(\hat{Y}_\mu,\hat{V}_\mu)$, соответственно, а i_X и i_Y - тождественные равномерные вложения равномерных пространств (X,U) и (Y,V) в $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ и $(\hat{Y}_\mu,\hat{V}_\mu)$, соответственно. Можно видеть, что квадрат является коммутативным.

ТЕОРЕМА 1. Для равномерно непрерывного отображения$f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U)на равномерное пространство (Y,V) следующие условия равносильны:

1) Отображение f- μ- полно;
2) $\hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X) \subset \hat{Y}_\mu \backslash Y$;
3) Квадрат декартов в категории *Unif*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.1)→2). Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - μ- полное отображение, а$y \in \hat{Y}_\mu \backslash Y$. Тогда $y \in Y$.Пусть$x \in X$- такая точка, что $\hat{f}_\mu(x) = y$. Если $x \in X$, то$x \in \hat{X}_\mu \backslash X$и $y \in \hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X)$. Включение $\hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X) \subset \hat{Y}_\mu \backslash Y$ доказано.Предположим, что$x \in \hat{X}_\mu \backslash X$. Через $\mathcal{F}$ обозначим след на X фильтра окрестностей точки x. Тогда $\mathcal{F}$- фильтр Коши,имеющий базу B мощностью $|B| \le \mu$ в (X,U). Если его образ $f\mathcal{F}$сходится к точке $y \in Y$, то f- μ- полное отображение, т.е. фильтр Коши$\mathcal{F}$,имеющий базу B мощностью $|B| \le \mu$сходится к некоторой точке $x_1 \in X$. Но по определению фильтра $\mathcal{F}$, он не имеет предела в (X,U), его предел $x = x_1$лежит вне пространства X. Пришли к противоречию. Поэтому единственно возможно $x \in X$ и включение $\hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X) \subset \hat{Y}_\mu \backslash Y$ доказано.

2)→3). Пусть $\hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X) \subset \hat{Y}_\mu \backslash Y$, $\varphi:(Z,W) \to (Y,V)$и $\psi:(Z,W) \to (\hat{X}_\mu \backslash X)$ такие равномерно непрерывные отображения, что $i_Y \circ \varphi = \hat{f}_\mu \circ \psi$. Учитывая, что i_X и i_Y - тождественные равномерные вложения, $i_Y(\varphi(Z))$ содержится в $\hat{Y}_\mu$. Из вложения $\hat{f}_\mu(\hat{X}_\mu \backslash X) \subset \hat{Y}_\mu \backslash Y$ и равенства $f(\psi(Z)) = i_Y(\varphi(Z))$следует, что $\varphi(Z) \subset X$. Определим отображение $h:Z \to X$по правилу $h(z) = \psi(z)$для любого $z \in Z$. По определению отображения h, имеем $\psi = i_X \circ h$ и $\varphi = f \circ h$. Покажем, что $h:(Z,W) \to (X,U)$ равномерно непрерывно. Так как на $\varphi(Z)$ равномерности U и $\hat{U}_\mu$ индуцируют одинаковую равномерность, то из равномерной непрерывности отображения ψ следует равномерная непрерывность отображения h. Единственность отображения h следует из его определения. Следовательно, квадрат декартов в категории *Unif*.

3)→1). Пусть квадрат декартов в категории *Unif*, а $\mathcal{F}$- фильтр Коши имеющий базу мощностью $\le \mu$ в (X,U) такой, что $f\mathcal{F}$ сходится к точке $y \in Y$ в (Y,V). Тогда фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеющий базу мощностью $\le \mu$ в (X,U) является базисом фильтра в $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ и поэтому сходится к некоторой точке $x \in \hat{X}_\mu$.Покажем, что $x \in X$. Рассмотрим одноточечное равномерное пространство $Z = \{x\}$ с тривиальной равномерностью W. Введем отображение $\varphi:(Z,W) \to (Y,V)$ и $\psi:(Z,W) \to (\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ так, чтобы $\varphi(x) = y$ и $\psi(x) = x$. Так как $\hat{f}_\mu(x) = y$ то $i_X \circ \varphi = \hat{f}_\mu \circ \psi$. Поэтому существует единственно отображение $h:(Z,W) \to (X,U)$ такое, что $\psi = i_X \circ h$ и $\varphi = f \circ h$. Но $i_X(h(x)) = \psi(x)$, $x \in X$, т.е. $\mathcal{F}$- фильтр Коши имеющий базу мощностью $\le \mu$ сходится в (X,U) и равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$- μ- полно. Теорема доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображениеравномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Равномерно непрерывное отображение$\hat{f}:(\hat{X},\hat{U}) \to (Y,V)$ равномерного пространства $(\hat{X},\hat{U})$ в равномерное пространство (Y,V) называется μ- пополнением отображения f, если выполняются следующие условия:

1) Равномерное пространство (X, U) есть всюду плотное подпространство равномерного пространства $(\hat{X}, \hat{U})$;

2) $f = \hat{f}|_X$;

3) Отображение $\hat{f}$ является μ- полным.

ТЕОРЕМА 2.Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) имеет единственное, с точностью до равномерного изоморфизма, μ-пополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ и $(\tilde{Y}_\mu, \tilde{V}_\mu)$- μ- пополнения равномерных пространств (X, U) и (Y, V), соответственно, а $\tilde{f}_\mu:(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu) \to (\tilde{Y}_\mu, \tilde{V}_\mu)$- единственное равномерно непрерывное продолжение отображения f. Положим $\hat{X} = \tilde{f}_\mu^{-1} Y$ и $\hat{f} = \tilde{f}_\mu|_{\hat{X}}$. Тогда $X \subset \hat{X}$ и $\hat{f}|_X = f$. Пусть $\hat{U}$- равномерность на $\hat{X}$, индуцированная равномерностью $\tilde{U}_\mu$. Тогда очевидно, что отображение $\hat{f}:(\hat{X}, \hat{U}) \to (Y, V)$ является равномерно непрерывным. Равномерное пространство $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ является μ- пополнением пространства $(\hat{X}, \hat{U})$, и из единственности отображения $\tilde{f}_\mu$ следует, что отображение $\hat{f}$ является единственным равномерно непрерывным продолжением отображения f на пространство $(\hat{X}, \hat{U})$ имеем $\tilde{f}_\mu(\tilde{X}_\mu \setminus \hat{X}) \subset \tilde{Y}_\mu \setminus Y$. Тогда, отображение $\hat{f}$- μ- полно.

Литература:

1. Энгелькинг Р. Общая топология,- Москва: Мир, 1986.
2. Борубаев А.А.Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990.
3. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные пространства. - Бишкек: Учкун, 2003.
4. Жумалиев Т.Ж. О ji- полных и ц- пополнениях равномерных пространств. Бишкек: Известия НАН КР, 2012.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Туганбаев У.М.