Каденова З.А.

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Z.A. Kadenova

ABOUT OF SOLUTIONS SYSTEMS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм для систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях доказаны теоремы единственности.

In the present article on the basis of a method of non-negative square forms for systems of the linear integrated equations of the first sort with two independent variables in unlimited areas uniqueness theorems are proved.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)u(s,x)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x),\ (t,x)\in G,$$

$$G=\{(t,x)\in R^2 : t_0 \le t<\infty,\ a\le x\le b\}, \qquad (1)$$

где $K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y),\ t_0\le t<\infty, & a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y),\ t_0\le t<\infty, & a\le x\le y\le b,\end{cases}$ (2)

$$H(t,x,s)=\begin{cases} M(t,x,s),\ t_0\le s\le t<\infty, & a\le x\le b;\\ N(t,x,s),\ t_0\le t\le s<\infty, & a\le x\le b,\end{cases} \qquad (3)$$

$$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ M(t,x,s),$$
$$N(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$$

- известные $n\times n$ - мерные самосопряженные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\ \ t_0\le t<\infty,\ \ a\le y\le x\le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):\ \ t_0\le t<\infty,\ \ a\le x\le y\le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):\ \ t_0\le s\le t<\infty,\ \ a\le x\le b\};$$
$$G_4=\{(t,x,s):\ \ t_0\le t\le s<\infty,\ \ a\le x\le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y):\ \ t_0\le s\le t<\infty,\ \ a\le y\le x\le b\}.$$

$f(t,x)$-известная, $u(t,x)$ - неизвестная n - мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Единственность решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода рассмотрена в [3]. В данной работе исследуется единственность решения системы уравнений (1) в классе $L_2(G)$.

Введем следующие обозначения:

1) Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим M, < . , . > – скалярное произведение в R^n, $\|A\|$, $\|u\|$ - нормы соответственно $n\times n$ - мерной матрицы $A=(a_{ij})\in M$ и n - мерного вектора u , т.е. для любых $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n)\in R^n$

$$\langle u,\vartheta\rangle = u_1\vartheta_1+u_2\vartheta_2+\dots+u_n\vartheta_n,$$

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \|A\|=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_{ij})^2\right)^{1/2};$$

2) $L_{2,n}(G)$ - пространство n – мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_{2,n}(G)$ - т.е. для любого $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t,x)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \|u(t,x)\|^2\,dxdt\right)^{\frac12};$$

3) $L_2((G^2);M)$ - пространство $n\times n$ - мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$,

$\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_2((G^2);M)$ - т.е. для любого $A(t,x,s,y)\in L_2((G^2);M)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^b \|A(t,x,s,y)\|^2 dydxdsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что ядро

$$\|C(t,x,s,y)\| \in L_2(G^2)$$

и

$$C(t,x,s,y) = C^*(s,y,t,x), \ (t,x,s,y) \in G^2$$

где C^* - сопряженная матрица к матрице C. Тогда матричное ядро $C(t,x,s,y)$ разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t,x,s,y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(t,x) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_n^{(i)}(t,x) \end{pmatrix} \left(\varphi_1^{(i)}(s,y),...,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right), \quad (3)$$

$l \le m \le \infty$,

где $\{(\varphi^{(i)}(t,x)) = (\varphi_\nu^{(i)}(t,x))\}$ - ортонормированная последовательность собственных вектор – функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$ – последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора С, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей т.е.

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots .$$

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B^*(s,z,y),$$
$$Q(s,y,\tau) = M(s,y,\tau) + N^*(\tau,y,s). \quad (5)$$

где $B^*(s,z,y)$, $N^*(\tau,y,s)$-соответственно сопряженные матрицы к матрице

$B(s,z,y)$, $N(\tau,y,s)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1) Матрица

$$P(s,b,a), \ \lim_{t\to\infty} Q(t,y,t_0), \ P_z(s,b,z),$$
$$\lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)$$

- неотрицательны соответственно при всех значениях

$$s \in [t_0,\infty], \ y \in [a,b],$$
$$(s,z), \ (\tau,y) \in G,$$
$$\|P(s,b,a)\| \in C[t_0,\infty],$$
$$\left\|\lim_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\right\| \in C[a,b],$$
$$\|P_z(s,b,z)\| \in C(G),$$
$$\left\|\lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)\right\| \in C(G);$$

2) Матрицы $P_y(s,y,a), \ Q_s(s,y,t_0),$ $P_{sy}(s,y,z), \ Q_{\tau s}(s,y,\tau)$ - неположительный при всех значениях соответственно

$$(s,y) \in G, \ (s,y,z) \in G_2, \ (s,y,\tau) \in G_4,$$
$$\|P_y(s,y,a)\| \in C(G), \ \|Q_s(s,y,t_0)\| \in C(G),$$
$$\|P_{zy}(s,y,z)\| \in C(G_1), \ \|Q_{\tau s}(s,y,\tau)\| \in C(G_3);$$

3) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

1) при почти всех $(s,y) \in [t_0,\infty] \times [a,b]$ матрица $P_y(s,y,a)$ – отрицательны;

2) при почти всех $(s,z) \in [t_0,\infty] \times [a,b]$ матрица $P_z(s,b,z)$ - положительны;

3) при почти всех $(s,y) \in G$ матрица $Q_s(s,y,t_0)$ – отрицательны;

4) при почти всех $(\tau,y) \in G$ матрица $\lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)$ – положительны;

и для любого

$$v(t,x) \in L_2(G),$$

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,$$

$$\int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds,$$

$$\int_t^\infty N(t,x,s)v(s,x)ds \in L_{2,n}(G),$$

где $C[t_0,\infty)$, $C(G)$, $C(G_1)$ и $C(G_3)$- пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty)$, G, G_1 и G_3;

4) Матричное ядро $C(t,x,s,y)$- представимо в виде разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2), (3) систему уравнений (1) запишем в виде

$$+\int_t^\infty N(t,x,s)u(s,x)dx+$$

$$+\int_{t_0}^\infty\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x). \tag{6}$$

Обе части системы (6) скалярно умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G, применяя формулу Дирихле и учитывая обозначения (5), получим

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dsdy+$$

$$+\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\left\langle\int_{t_0}^\infty\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy= \tag{7}$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^\infty\langle f(s,y)u(s,y)\rangle dyds$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (7).

Известно что, если K - самосопряженная матрица размеров $n\times n$, то

$$\langle K\vartheta,\vartheta_s\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_s-\frac{1}{2}\langle K_s\vartheta,\vartheta\rangle; \tag{8}$$

где ϑ – некоторый n мерный вектор-функция.

Далее имея ввиду, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi=-u(\tau,y),$$

с помощью интегрирования по частям и с учетом (8) первый слагаемый левой части (7) преобразуем к виду

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$

$$=-\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle P_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle P_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds \tag{9}$$

Аналогично, для второго слагаемого имеем

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^\infty u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^\infty u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle Q_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyds+$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^\infty u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^\infty u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_{t_0}^s\left\langle Q_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dyds. \tag{10}$$

Подставляя (4), (9), (10) в (7) получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle P_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle P_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^\infty u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^\infty u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle Q_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyds+$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle \lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty}u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{s}\left\langle Q_{\tau s}(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dyds +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\left|\left\langle \varphi^{(i)}(s,y), u(s,y)\right\rangle\right|^2 dsdy =$$

$$=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle f(s,y), u(s,y)\right\rangle dyds. \qquad (11)$$

Пусть $f(t,x)=0,\quad (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (11) имеем $u(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in G$. Теорема доказана.

Литература:

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Асанов А., Каденова З.А. О единственности решения для одного классаинтегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Сам ГТУ, 2004.-Ч.3.-С.122-126.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.