Каденова З.А.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Z.A. Kadenova

REGULARIZATION OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

В настоящей статье доказаны теорема о регуляризации решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article are proved the theorem about regularization of solutions of the linear integrated equations of the first sort with two independent variables in unlimited oblastyakh.oblastyakh.neogranichenny areas.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)u(s,x)ds + $$
$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x),(t,x)\in G=$$
$$=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t<\infty, a\le x\le b\}, \qquad (1)$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y), \ t_0\le t<\infty, \ a\le y\le x\le b; \\ B(t,x,y), \ t_0\le t<\infty, \ a\le x\le y\le b, \end{cases} \qquad (2)$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases} M(t,x,s), \ t_0\le s\le t<\infty, \ a\le x\le b; \\ N(t,x,s), \ t_0\le t\le s<\infty, \ a\le x\le b, \end{cases} \qquad (3)$$

Предполагается, что

$$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s),$$
$$N(t,x,s), C(t,x,s,y)$$

- являются непрерывные функции, определенные соответственно в области

$G_1=\{(t,x,y), \ t_0\le t<\infty, \quad a\le y\le x\le b\}$,

$G_2=\{(t,x,y), \ t_0\le t<\infty, \quad a\le x\le y\le b\}$,

$G_3=\{(t,x,s), \ t_0\le s\le t<\infty, \quad a\le x\le b\}$,

$G_4=\{(t,x,s), \ t_0\le t\le s<\infty, \quad a\le x\le b\}$, $G^2=G\times G$,

$f(t,x)$- известная, а $u(t,x)$ - неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Рассмотрена единственность, и устойчивость решений для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными рассмотрена в [3].

Ядро $C(t,x,s,y)$ - интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),$$
$$m\le\infty, \quad 0\le\lambda_i, \quad i=1,2,...,m. \qquad (4)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...$ - собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge ...$ и $\varphi_1(t,x), \ \varphi_2(t,x),...$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$\begin{cases} P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y), \ (s,y,z)\in G_1, \\ Q(s,y,\tau)=M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s). \ (s,y,\tau)\in G_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Пусть выполняется следующие условия:

1) $P(s,b,a)\in C[t_0,\infty), \ P(s,b,a)\ge 0, \quad \forall s\in[t_0,\infty),$
$P'_y(s,y,a)\in C(G), \ P'_y(s,y,a)\le 0, \quad \forall(s,y)\in G,$

$$P'_z(s,b,z)\in C(G), \ P'_z(s,b,z)\ge 0, \quad \forall(s,z)\in G,$$
$$P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1), \ P''_{zy}(s,y,z)\le 0, \quad \forall(s,y,z)\in G_1,$$

и для любого

$$v(t,x)\in L_2(G),$$
$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,$$
$$\int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds, \int_t^{\infty} N(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G),$$

где $C[t_0,\infty)$, $C(G)$ и $C(G_1)$ - пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty)$, G и G_1;

2) $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\in C[a,b]$, $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\geq 0$, $\forall y\in[a,b]$, $Q'_s(s,y,t_0)\in C(G)$, $Q'_s(s,y,t_0)\leq 0$, $\forall (s,y)\in G$,

$\lim\limits_{t\to\infty} Q'_\tau(t,y,\tau)\in C(G)$, $\lim\limits_{t\to\infty} Q'_\tau(t,y,\tau)\geq 0$, $\forall (y,\tau)\in G$, $Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3)$, $Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\leq 0$, $\forall (s,y,\tau)\in G_3$,

где $C(G_3)$ - пространство всех непрерывных и ограниченных функций в G_3;

3) Ядра $C(t,x,s,y)$ - представимо в виде (5) и в разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

Семейство множеств корректности M_α, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t,x)\in L_2(G):\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\leq c\right\},$$

где

$$c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$$

$$u^{(\nu)}=\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b u(t,x)\,\varphi_\nu(t,x)dxdt\ ,\ \nu=1,2,\dots,\infty.$$

Ясно, что если $u(t,x)\in M_\alpha$, то

$$\|u(t,x)\|^2\leq c\lambda_1^2.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), $K(M_\alpha)\subset L_2(G)$- образ M_α при отображении K. Тогда решение уравнение (1) единственно $L_2(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1}, обратный к K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\dfrac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е.

$$\|u(t,x)\|_{L_2}\leq c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\qquad (6)$$
$$0<\alpha<\infty$$

где $u(t,x)\in M_\alpha$, $f(t,x)\in K(M_\alpha)$.

Доказательство. Обе части уравнения (1) умножим на функции $u(t,x)$, интегрируем по области G. Далее, интегрируя по частям, применяя формулы Дирихле и учитывая (4), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2dyds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2dzdyds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right)^2dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}Q'_s(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2dsdy+$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\lim_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right)^2d\tau dy-$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2d\tau dsdy+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\varphi_i(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2=$$
$$=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}f(s,y)u(s,y)dsdy,\ (t,x)\in G.$$

Отсюда, в силу условий 1) и 2) получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|u^{(\nu)}\right|^2\leq\|f(t,x)\|_{L_2}\cdot\|u(t,x)\|_{L_2}.\qquad (7)$$

Из (7) вытекает единственность решений уравнения (1) в $L_2(G)$.

С другой стороны, если $f(t,x)\in K(M_\alpha)$, то $u(t,x)\in M_\alpha$ и

$$\|u(t,x)\|_{L_2}^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\cdot\lambda_\nu^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}}\leq$$

$$\leq\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{-1}}\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при

$$p=\frac{(1+\alpha)}{\alpha},\quad q=1+\alpha.$$

Учитывая $u(t,x)\in M_\alpha$ и (7), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t,x)\|^2_{L_2} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \|u(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\|u(t,x)\|^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$, получим

$$\|u(t,x)\|_{L_2}^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \le \left[c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}.$$

Следовательно, мы получили оценки (6). Теорема 1. доказана.

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.