Толубаев Ж.О.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

Zh. O. Tolubaev

ON A CLASS OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR INTEGRO-ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ EQUATIONS OF THE FIRST ORDER VOLTERRA-STIELTJES TRANSFORM ON THE HALF-AXIS

УДК 517. 968

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегральных уравнений первого порядка Вольтерра-Стильтьеса второго рода к пространству $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: *производная по возрастающей функции, непрерывная матричная функция, вектор-функция, пространство* $n\times n-$ *мерных непрерывных матричных функций.*

In this paper, based on the concept of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the solutions of linear Volterra integral equations of the second kind-Stieltjes in space $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$.

Keywords: *derivative increasing function, continuous matrix function, vector-function space dimensional continuous matrix functions.*

Рассмотрим систему линейных интегро-диффернциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x'(t)+A(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left[x'(\tau)+B(\tau)x(\tau)\right]dg(\tau)=f(t),\ \ t\ge t_0 \qquad (1)$$

$$x(t_0)=c \qquad (2)$$

-где интеграл является интегралом Стильтьеса, $C=(c_1,c_2,...,c_n)\in R^n$, $K(t,\tau)-n\times n$ мерная симметричная непрерывная матричная функция, т.е. $K^T(t,\tau)=K(t,\tau)$, где $G=\{(t,\tau)\in R^2 : t_0\le\tau\le t<\infty\}$, $A(t),B(t)-n\times n$ - мерные симметричные непрерывные матричные функции, $x(\tau)-$ n - мерная векторная функция, $f(t)-$ заданая непрерывная n -мерная векторная функция, $g(t)-$ заданная возрастающая непрерывная функция на $[t_0,\infty)$, $x(t)$ – n -мерная искомая векторная функция, а производная $x'(t)$ определяется следующим равенством $x'(t)=\dfrac{dx(t)}{dg(t)}\dfrac{dg(t)}{dt}=g'(t)\dfrac{dx(t)}{dg(t)}$.

Все фигурирующие векторные, матричные функции являются непрерывными и соотношения имеют место для всех $t\ge t_0$ и $t\ge\tau\ge t_0$.

Вопросы единственности, ограниченности и принадлежности решений, квадратично-суммируемых вектор-функций для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразований уравнений исследованы в работах [1-2, 4-8].

Введем обозначения: $C_n[t_0;\infty)-$ пространство n -мерных непрерывных вектор функций с элементами из $C[t_0,\infty]$ и $C_{nn}(G)-$ пространство $n\times n-$ мерных непрерывных матричных функций с элементами из $C(G)$. Через $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ обозначим пространство всех n -мерных вектор-функций $x(t)=\{x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\}$ удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(t)\|^2dg(t)<\infty$$

Для любых $x(\eta)=\{x_1(\eta),x_2(\eta),\dots,x_n(\eta)\},\ y(\xi)=\{y_1(\xi),y_2(\xi),\dots,y_n(\xi)\}\in \tilde{N}_n[t_0,\infty)$ скалярные произведения определяется следующим равенством $\langle x(\eta),y(\xi)\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i(\eta)y_i(\xi),$ норма $A(t)-n\times n$ мерной симметричной матричной функции определяется следующим равенством $\|A(t)\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|$, а норма n-мерных векторных функций $x(t)=\{x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)\}$ определяется следующим равенством $\|x(t)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ЗАДАЧА. В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнения первого порядка (1) типа Вольтерра-Стильтьеса к пространству $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

ТЕОРЕМА. Пусть для систем линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1) выполняются следующие условия:

1) $g'(t)\ge 0$ äëÿ âñåõ $t\in[t_0,\infty),\ (g'(t))'_{g(t)},\ \|A(t)\|$ $è$ $\|B(t)\|,\ \left\|[A(t)+B(t)]'_{g(t)}\right\|-$ íåïðåðûâíû å ôóíêöèè íà $[t_0,\infty)$ $è$ $[A(t)+B(t)]^*=A(t)+B(t),\ t\in[t_0,\infty);$

2) $\|K'_{g(t)}(t,s)\|,\ \|K'_{g(s)}(t,s)\|,\ \|K''_{g(t)g(s)}(t,s)\|-$ íåïðåðûâíû å ôóíêöèè íà G,

где $K'_{g(t)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{K(t+\Delta,s)-K(t,s)}{g(t+\Delta)-g(t)},\quad K'_{g(s)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{K(t,s+\Delta)-K(t,s)}{g(s+\Delta)-g(s)};$

3) пусть для любых $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ выполняются следующие неравенства:

$$a)\ \left\langle\left\{B^*(t)A(t)-\frac{1}{2}(g'(t))'_{g(t)}[A(t)+B(t)]-\frac{1}{2}g'(t)[A(t)+B(t)]'_{g(t)}\right\}x(t),x(t)\right\rangle\ge\alpha\|x(t)\|^2$$

$$u\ \ \langle K(t,t_0)x(t),x(t)\rangle\ge 0,\ \ \langle K'_{g(t)}(t,t_0)x(t),x(t)\rangle\le 0\ \text{ïðè âñåõ}\ t\in[t_0,\infty),\ \text{ãäå}\ \alpha\in R,\ \alpha>0;$$

$$b)\ \langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)x(t),x(t)\rangle\ge 0\ \ u\ \ \langle K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)x(t),x(t)\rangle\le 0$$

$$\text{äëÿ âñåõ}\ (t,\tau)\in G=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<\infty\};$$

4) $\|f(t)\|\in L^2{}_g[t_{0,}\infty)$ $è$ $\|f(t)\|\|B(t)\|\in L^2_g[t_0,\infty)$.

тогда решение системы линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка **(1)** $x(t)$ и его производная $x'(t)$ принадлежит к пространству $L^2{}_{n,g}[t_0,\infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2dg(s)+\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2dg(s)\le\frac{1}{\beta-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[1+\|B(s)\|^2\right]f(s)\|^2dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle\right\},$$

$\text{ãäå}\ \beta=min\{1,\alpha\},\ 0<\varepsilon<\beta.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [1] и скалярно умножая уравнения **(1)** на $x'(t)+B(t)x(t)$ и затем, интегрируя от t_0 до t по Стильтьесу получаем:

$$\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),x'(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\langle A(s)x(s),B(s)x(s)\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)[x'(\tau)+B(\tau)x(\tau)],[x'(s)+B(s)x(s)]\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),[x'(s)+B(s)x(s)]\rangle dg(s)\qquad(3)$$

Для первого интеграла в левой части соотношения (3) применяем следующее тождество

$$\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),x'(s)\rangle dg(s)=\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)$$

Для вычисления второго интеграла в левой части соотношения (3) будем исползовать следующее тождество:

$$\left(\langle g'(s)x(s),\,[A(s)+B(s)]x(s)\rangle\right)'_{g(s)}=\left\langle g'(s)\frac{dx(s)}{dg(s)},[A(s)+B(s)]x(s)\right\rangle+$$

$$+\left\langle (g'(s))'_{g(s)}\,x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\right\rangle+\left\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]'_{g(s)}x(s)\right\rangle+$$

$$+\left\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]\frac{dx(s)}{dg(s)}\right\rangle$$

$$\text{т.е.}\ \ \langle x'(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle=\frac{1}{2}\left(\langle g'(s)x(s),\,[A(s)+B(s)]x(s)\rangle\right)'_{g(s)}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle (g'(s))'_{g(s)}\,x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]'_{g(s)}x(s)\right\rangle$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle\right)'_{g(s)}dg(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle (g'(s))'_{g(s)}\,x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\right\rangle dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]'_{g(s)}x(s)\right\rangle dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle\Big|_{s=t_0}^{s=t}-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle (g'(s))'_{g(s)}x(s),[A(s)+B(s)]x(s)\right\rangle dg(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle g'(s)x(s),[A(s)+B(s)]'_{g(s)}x(s)\right\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\langle g'(t)x(t),[A(t)+B(t)]x(t)\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{(g'(s))'_{g(s)}[A(s)+B(s)]-g'(s)[A(s)+B(s)]'_{g(s)}\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)$$

Из последнего соотношения получим

$$\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),[A(s)+B(s)]x(s)\rangle dg(s)=\frac{1}{2}\langle g'(t)x(t),[A(t)+B(t)]x(t)\rangle-\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{(g'(s))'_{g(s)}[A(s)+B(s)]-g'(s)[A(s)+B(s)]'_{g(s)}\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)\qquad(4)$$

Учитывая (4), из (3) имеем

$$\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{B^*(s)A(s)-\frac{1}{2}(g'(s))'_{g(s)}[A(s)+B(s)]-\frac{1}{2}g'(s)[A(s)+B(s)]'_{g(s)}\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\langle g'(t)x(t),[A(t)+B(t)]x(t)\rangle+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)[x'(\tau)+B(\tau)x(\tau)],[x'(s)+B(s)x(s)]\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\langle f(s),[x'(s)+B(s)x(s)]\rangle dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle\qquad(5)$$

Для вычисления двойного интеграла в соотношении (5) применяем следующие равенства и формулы нахождения производных скалярного произведения векторных функций

$$\left\langle u(t), v(t)\right\rangle'_{g(t)} = \left\langle u'_{g(t)}(t), v(t)\right\rangle + \left\langle u(t), v'_{g(t)}(t)\right\rangle,$$

1. $$\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle = \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle + \left\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau), v(s)\right\rangle, \quad (s,\tau)\in G,$$

Из последного тождества следует, что

$$\left\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau), v(s)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle - \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle \qquad (6)$$

где $z(s,\tau)$ определяется по следующей формуле

$$z(s,\tau) = \int_\tau^s v(t)\,dg(t) = \int_\tau^s \left[x'(t) + B(t)x(t)\right]dg(t) \qquad (7)$$

из (7) и теоремы из [3] следует

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau) = -\left[x'(\tau) + B(\tau)x(\tau)\right], \qquad (8)$$

$$z'_{g(s)}(s,\tau) = x'(s) + B(s)x(s). \qquad (9)$$

2. Далее учитывая, $K^T(t,\tau) = K(t,\tau)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial g(s)}\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial g(s)}\left[K(s,\tau)z(s,\tau)\right], z(s,\tau)\right\rangle + \left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), \frac{\partial}{\partial g(s)} z(s,\tau)\right\rangle =$$

$$= \left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle + \left\langle K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle + \left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle =$$

$$= \left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle + 2\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle$$

Отсюда, получим

$$\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau), z(s,\tau)\right\rangle, \quad (s,t)\in G \qquad (10)$$

Далее учитывая (6) имеем

$$\int_{t_0}^s \left\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau) = \int_{t_0}^s \frac{\partial}{\partial g(\tau)}\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau) - \int_{t_0}^s \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau) =$$

$$= \left\langle K(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s} - \int_{t_0}^s \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau) = -\left\langle K(s,t_0)z(s,t_0), v(s)\right\rangle -$$

$$-\int_{t_0}^s \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau), \quad s\in[t_0,\infty).$$

В силу (7) и (8) из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^s \left\langle K(s,\tau)v(\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau) = \left\langle K(s,t_0)z(s,t_0), v(s)\right\rangle + \int_{t_0}^s \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau), \quad s\in[t_0,\infty).$$

Отсюда интегрируя от t_0 до t получим

$$\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s \left\langle K(s,\tau)v(\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau)dg(s) = \int_{t_0}^t \left\langle K(s,t_0)z(s,t_0), v(s)\right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^t\int_{t_0}^s \left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau)dg(s). \qquad (11)$$

Применяя формулы (7), (9), (10) и обобщенную формулу Дирихле [3] из (11) имеем

$$\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s \left\langle K(s,\tau)v(\tau), v(s)\right\rangle dg(\tau)dg(s) = \int_{t_0}^t \left\langle K(s,t_0)z(s,t_0), z'_{g(s)}(s,t_0)\right\rangle dg(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}\left\langle K(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(s)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(t,\tau),z(t,\tau)\right\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)\qquad(12)$$

Учитывая (12) и условия теоремы 1, из (5) получим

$$\int_{t_0}^{t}\left\|x'(s)\right\|^2 dg(s)+\frac{1}{2}\left\langle g'(t)x(t),[A(t)+B(t)]x(t)\right\rangle+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left\langle\left\{B^*(s)A(s)-\frac{1}{2}(g'(s))'_{g(s)}[A(s)+B(s)]-\frac{1}{2}g'(s)[A(s)+B(s)]'_{g(s)}\right\}x(s),x(s)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+\qquad(13)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(t,\tau),z(t,\tau)\right\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left\langle f(s),[x'(s)+B(s)x(s)]\right\rangle dg(s)+\frac{1}{2}\left\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\right\rangle,$$

Для вычисления интеграла в правой части соотношения (13) производим следующие преооброзования:

$$\int_{t_0}^{t}\left\langle f(s),[x'(s)+B(s)x(s)]\right\rangle dg(s)=\int_{t_0}^{t}\left\langle f(s),x's\right\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\langle f(s),B(s)x(s)\right\rangle dg(s)$$

Отсюда применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов, получим

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left\langle f(s),[x'(s)+B(s)x(s)]\right\rangle dg(s)\right|\le\int_{t_0}^{t}\left\|f(s)\right\|\left\|x'(s)\right\|dg(s)+\int_{t_0}^{t}\left\|f(s)\right\|\left\|B(s)\right\|\left\|x(s)\right\|dg(s)$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|f(s)\|\sqrt{\varepsilon}\|x'(s)\|dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2 dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|f(s)\|\|B(s)\|\sqrt{\varepsilon}\|x(s)\|dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2\|B(s)\|^2 dg(s)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2 dg(s)$$

В силу условий теоремы 1 1), 2), 3), 4) и применяя последние неравенства из (13) соотношения имеем

$$(1-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)+(\alpha-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2 dg(s)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[1+\|B(s)\|^2\right]\|f(s)\|^2 dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|^2 dg(s)+\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2 dg(s)\le\frac{1}{\beta-\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[1+\|B(s)\|^2\right]\|f(s)\|^2 dg(s)+\frac{1}{2}\langle g'(t_0)c,[A(t_0)+B(t_0)]c\rangle\right\}$$

где $\beta=min\{1,\alpha\},\ 0<\varepsilon<\beta$.

Из последнего неравенства вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему линейных интегро-диффернциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра-Стильтьеса (1) при

$$n=2,\ t_0=1,\ g(t)=\sqrt{1+t}\quad u\quad K(t,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{1+s}}{\sqrt{1+t}} & \dfrac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{1+t}}\\ \dfrac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{1+t}} & \dfrac{6\sqrt{1+s}}{\sqrt{1+t}}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{1+t}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix},$$

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{1+t}\\ \sqrt{1+t} & 1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}(t)=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{1+t}\\ \sqrt{1+t} & -1\end{pmatrix}$$

т.е. следующую систему линейных интегро-диффернциальных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x'(t)+\begin{pmatrix}1 & \sqrt{1+t}\\ \sqrt{1+t} & 1\end{pmatrix}x(t)+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{1+\tau}}{\sqrt{1+t}} & \dfrac{\sqrt{1+\tau}}{\sqrt{1+t}}\\ \dfrac{\sqrt{1+\tau}}{\sqrt{1+t}} & \dfrac{6\sqrt{1+\tau}}{\sqrt{1+t}}\end{pmatrix}\left[x'(\tau)+\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{1+\tau}\\ \sqrt{1+\tau} & -1\end{pmatrix}x(\tau)\right]dg(\tau)=f(t),\quad t\ge 1$$

$x(1)=c$

Проверим выполнение условий теоремы:

$$g(t)=\sqrt{1+t}\ ,\qquad g'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{1+t}},\qquad (g'(t))'_{g(t)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$$

$$B^*(t)=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{1+t}\\ \sqrt{1+t} & -1\end{pmatrix};\quad A(t)+B(t)=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{1+t}\\ 2\sqrt{1+t} & 0\end{pmatrix}$$

1. $[A(t)+B(t)]^*=A(t)+B(t);$

$$B^*(t)A(t)=\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix},\quad -\frac{1}{2}(g'(t))'_{g(t)}[A(t)+B(t)]=\frac{1}{4(t+1)}\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{1+t}\\ 2\sqrt{1+t} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}g'(t)[A(t)+B(t)]'_{g(t)}=-\frac{1}{4\sqrt{1+t}}\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{1+t}\\ 2\sqrt{1+t} & 0\end{pmatrix}'_{g(t)}=-\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

2. $$B^*(t)A(t)-\frac{1}{2}(g'(t))'_{g(t)}[A(t)+B(t)]-\frac{1}{2}g'(t)[A(t)+B(t)]'_{g(t)}=\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}x(t),x(t)\right\rangle\geq\|x(t)\|^2\ \text{ò.å.}\ \ \alpha=1.$$

$$K(t,1)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix},\ \ \langle K(t,1)x,x\rangle\geq 0,\qquad K'_{g(t)}(t,1)=-\frac{\sqrt{2}}{1+t}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}\quad\langle K'_{g(t)}(t,1)x,x\rangle\leq 0$$

$$K'_{g(s)}(t,s)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix},\ \ \langle K'_{g(s)}(t,s)x,x\rangle\geq 0,$$

$$K''_{g(t)g(s)}(t,s)=-\frac{1}{1+t}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}\quad\langle K''_{g(t)g(s)}(t,s)x,x\rangle\leq 0$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы.

Литература

[1] Ведь Ю.А., Искандаров С. О единственности решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода на полуоси. // Известие АН Киргизской ССР, Вуп №5 - Фрунзе: Илим, 1986. С.14-18

[2] Асанов А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси.// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.− Фрунзе: Илим, 1985.− Вып.18.− С.17-20.

[3] Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. //Табигый илимдер журналы. Кыргызско-турецкий университет Манаса - Бишкек: 2001. С.18-64.

[4] Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра. // Известие АН Киргизской ССР, Вуп №3 - Фрунзе: Илим, 1978. С.30-33

[5] Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно призводной.// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.− Фрунзе: Илим, 1980.− Вып.13.− С.185-192.

[6] Винокуров В.Р. Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.// Дифференциальные уравнения. − Том 3 №10, 1967.− С.1732-1744.

[7] Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений.// Математический анализ.− Казань: Издательсво Казанского ун-та, 1978.− С.103-107.

[8] Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решеий одного класса нелинейных уравнений Вольтера.// Математический анализ.− Казань: Издательство Казанского ун-та, 1971.− С.63-71.

[9] Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтера-Стильтьеса. // Табигый илимдер журналы Кыргызско-турецкий университети Манаса - Бишкек: 2003. - С.65-78

Рецензент: к.ф-м.н. Сулайманов Б.