

Каденова З.А.

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ
ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

Z.A. Kadenova

**REGULARIZATION AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS
OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO
VARIABLES IN UNLIMITED AREAS**

УДК 517.968

В настоящей статье доказана теорема единственности и регуляризация решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article the theorem of uniqueness and regularization of solutions of the linear integral equations of the first with two independent variables in unlimited areas is proved.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t, x, s)u(s, x)ds + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dyds = f(t, x), (t, x) \in G = \{(t, x) \in R^2 : t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq b\}, \quad (1)$$

где

$$K(t, x, y) = \begin{cases} A(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, a \leq y \leq x \leq b; \\ B(t, x, y), & t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq y \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$$H(t, x, s) = \begin{cases} M(t, x, s), & t_0 \leq s \leq t < \infty, a \leq x \leq b; \\ N(t, x, s), & t_0 \leq t \leq s < \infty, a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3)$$

$A(t, x, y), B(t, x, y), M(t, x, s), N(t, x, s), C(t, x, s, y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(t, x, y), t_0 \leq t < \infty, a \leq y \leq x \leq b\}, \\ G_2 &= \{(t, x, y), t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq y \leq b\}, \\ G_3 &= \{(t, x, s), t_0 \leq s \leq t < \infty, a \leq x \leq b\}, \\ G_4 &= \{(t, x, s), t_0 \leq t \leq s < \infty, a \leq x \leq b\}, \quad G^2 = G \times G, \\ f(t, x) &- \text{известная, а } u(t, x) - \text{неизвестная функция, } (t, x) \in G. \end{aligned}$$

Основные результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1-3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву.

Предполагается, что ядро $C(t, x, s, y)$ - интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t, x, s, y) \in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t, x, s, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(t, x) \varphi_i(s, y), \quad m \leq \infty, \quad 0 \leq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ - собственные значения ядра $C(t, x, s, y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ и $\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \dots$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$\begin{cases} P(s, y, z) = A(s, y, z) + B(s, z, y), & (s, y, z) \in G_1, \\ Q(s, y, \tau) = M(s, y, \tau) + N(\tau, y, s), & (s, y, \tau) \in G_3. \end{cases} \quad (5)$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} 1) \quad & P(s, b, a) \in C[t_0, \infty), \quad P(s, b, a) \geq 0, \quad \forall s \in [t_0, \infty), \\ & P'_y(s, y, a) \in C(G), \quad P'_y(s, y, a) \leq 0, \quad \forall (s, y) \in G, \\ & P'_z(s, b, z) \in C(G), \quad P'_z(s, b, z) \geq 0, \quad \forall (s, z) \in G, \\ & P''_{zy}(s, y, z) \in C(G_1), \quad P''_{zy}(s, y, z) \leq 0, \quad \forall (s, y, z) \in G_1, \end{aligned}$$

и для любого

$$v(t, x) \in L_2(G),$$

$$\int_a^x A(t, x, y)v(t, y)dy, \int_x^b B(t, x, y)v(t, y)dy, \int_{t_0}^t M(t, x, s)v(s, x)ds, \int_t^\infty N(t, x, s)v(s, x)ds \in L_2(G), \text{ где}$$

$C[t_0, \infty)$, $C(G)$ и $C(G_1)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0, \infty)$, G и G_1 ;

$$\begin{aligned} 2) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, y, t_0) \in C[a, b], \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, y, t_0) \geq 0, \quad \forall y \in [a, b], \\ & Q'_s(s, y, t_0) \in C(G), \quad Q'_s(s, y, t_0) \leq 0, \quad \forall (s, y) \in G, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} Q'_\tau(t, y, \tau) \in C(G), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q'_\tau(t, y, \tau) \geq 0, \quad \forall (y, \tau) \in G, \\ & Q''_{\tau s}(s, y, \tau) \in C(G_3), \quad Q''_{\tau s}(s, y, \tau) \leq 0, \quad \forall (s, y, \tau) \in G_3, \end{aligned}$$

где $C(G_3)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций в G_3 ;

3) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

$$\begin{aligned} \text{а) при почти всех } (s, y) \in G \quad & P'_y(s, y, a) < 0; \\ \text{б) при почти всех } (s, z) \in G \quad & P'_z(s, b, z) > 0; \\ \text{в) при почти всех } (s, y) \in G \quad & Q'_s(s, y, t_0) < 0; \\ \text{г) при почти всех } (\tau, y) \in G \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} Q'_\tau(t, y, \tau) > 0. \end{aligned}$$

4) Ядро $C(t, x, s, y)$ – представимо в виде (4) и в разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

5) Ядро $C(t, x, s, y)$ – представимо в виде (4) и в разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

Теорема 5.3.1. Пусть выполняются условия 1), 2), 3), 4). Тогда решение $u(t, x)$ уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. В силу (2), (3) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t, x, y)u(t, y)dy + \int_x^b B(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t M(t, x, s)u(s, x)ds +$$

$$\int_t^\infty N(t, x, s)u(s, x)ds + \int_{t_0}^\infty \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dyds = f(t, x). \quad (6)$$

Обе части уравнения (6) умножим на $u(t, x)$, и интегрируя по области G , имеем

$$\int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_a^y A(s, y, z)u(s, z)u(s, y)dzdsdy + \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_y^b B(s, y, z)u(s, z)u(s, y)dzdsdy +$$

$$+ \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^s M(s, y, \tau)u(\tau, y)u(s, y)d\tau dsdy + \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_s^\infty N(s, y, \tau)u(\tau, y)u(s, y)d\tau dsdy +$$

$$+ \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^b \int_a^\infty C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)u(s, y)dzd\tau dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^\infty f(s, y)u(s, y)dsdy. \quad (7)$$

Применяя формулу Дирихле из (7) и учитывая обозначения (5), имеем

$$\int_{t_0}^\infty \int_a^b \int_a^y P(s, y, z)u(s, z)u(s, y)dzdyds + \int_{t_0}^\infty \int_a^b \int_{t_0}^s Q(s, y, \tau)u(\tau, y)u(s, y)d\tau dyds +$$

$$+ \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^b \int_a^\infty C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)u(s, y)dzd\tau dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^\infty f(s, y)u(s, y)dsdy. \quad (8)$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (8), дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, имеем

$$\int_{t_0}^\infty \int_a^b \int_a^y P(s, y, z)u(s, z)u(s, y)dzdyds = - \int_{t_0}^\infty \int_a^b \int_a^y P(s, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_z^y u(s, v)dv \right) dz u(s, y)dyds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^\infty P(s, b, a) \left(\int_a^b u(s, v)dv \right)^2 ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^\infty \int_a^b P'_y(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v)dv \right)^2 dyds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^\infty \int_a^b P'_z(s, b, z) \left(\int_z^b u(s, v)dv \right)^2 dzds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^\infty \int_a^b \int_a^y P''_{zy}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v)dv \right)^2 dzdyds; \quad (9)$$

где $P'_t(t, x, s)$, $P'_y(t, x, s)$ частные производные по t и s соответственно.

$$\int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^s Q(s, y, \tau)u(\tau, y)u(s, y)d\tau dsdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, y, t_0) \left(\int_{t_0}^\infty u(\xi, y)d\xi \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^\infty Q'_s(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y)d\xi \right)^2 dsdy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} Q'_\tau(t, y, \tau) \left(\int_\tau^\infty u(\xi, y)d\xi \right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^s Q''_{\tau s}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y)d\xi \right)^2 d\tau dsdy. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (8) и учитывая (4), получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} P(s, b, a) \left(\int_a^b u(s, v) dv \right)^2 ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b P'_y(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 dy ds + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b P'_z(s, b, z) \left(\int_z^b u(s, v) dv \right)^2 dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^y P''_{zy}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 dz dy ds + \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^b \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, y, t_0) \left(\int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} Q'_s(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 ds dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} Q'_\tau(t, y, \tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\infty} Q''_{\tau s}(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau ds dy + \\
 & + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \varphi_i(s, y) u(s, y) ds dy \right)^2 = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} f(s, y) u(s, y) ds dy, \quad (t, x) \in G. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Пусть $f(t, x) \equiv 0$, $(t, x) \in G$. Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (11), имеем

$$\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi = 0, \quad (s, y) \in G \quad \text{или} \quad \int_a^y u(s, v) dv = 0, \quad (s, y) \in G.$$

Отсюда $u(t, x) = 0$, при всех $(t, x) \in G$. Теорема 1. доказана.

Семейство множеств корректности M_α , зависящее от параметра α , выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t, x) \in L_2(G) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \leq c \right\},$$

где $c > 0$, $0 < \alpha < \infty$,

$$u^{(v)} = \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b u(t, x) \varphi_v(t, x) dx dt, \quad v = 1, 2, \dots, \infty.$$

Ясно, что если $u(t, x) \in M_\alpha$, то

$$\|u(t, x)\|^2 \leq c \lambda_1^2.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2), $K(M_\alpha) \subset L_2(G)$ -образ M_α при отображении K . Тогда решение уравнение (1) единственно в $L_2(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1} , обратный к K , равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е.

$$\|u(t, x)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t, x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (12)$$

где $u(t, x) \in M_\alpha$, $f(t, x) \in K(M_\alpha)$.

Покажем, что решение уравнения

$$\varepsilon \mathcal{Q}(t, x, \varepsilon) + \int_a^b K(t, x, y) u(s, y) \mathcal{Q}(t, y, \varepsilon) dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t, x, s) \mathcal{Q}(s, x, \varepsilon) ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y) g(s, y, \varepsilon) dy ds = f(t, x), (t, x) \in G, \quad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α .

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (13)

$$g(t, x, \varepsilon) = u(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon),$$

где $u(t, x) \in M_\alpha$ - решение уравнения (1), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \xi(t, x, \varepsilon) + \int_a^b K(t, x, y) \xi(t, y, \varepsilon) dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t, x, s) \xi(s, x, \varepsilon) ds + \\ & + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y) \xi(s, y, \varepsilon) dy ds = -\varepsilon u(t, x). \end{aligned} \quad (14)$$

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914. HIKARI Ltd.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Иманалиев Т.М.