МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТРАНСПОРТ

Агыбаев А.С.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ КОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

A.S. Agybaev

SOME TYPES OF COMPACT MAPPINGS OF TOPOLOGICAL SPACES

УДК: 515.12

Бул илимий макалада топологиялык мейкиндиктин узгултуксуз чагылдырууларынын айрым компактуу типтери изилденет.

В настоящей статье исследуется некоторые типы компактных отображений топологических пространств.

In this article the some type of compact mappings of topological space where are studied.

Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ – непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) и B_f – его база.

Напомним [4], что совокупность B_f открытых множеств топологии τ называется базой отображения f, если для каждой точки $x\in X$ и любого содержащего x открытого множества U существуют такие открытое множество V пространства (Y,μ) содержащего $y=f(x)$ и множество $O\in B_f$, что $x\in f^{-1}V\cap O\subset U$.

Через γ_f обозначим открытое покрытие пространства (X,τ), состоящее из открытых множеств элементов базы B_f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ называется паракомпактным отображением, если для любого открытого покрытия α пространства (X,τ) существуют открытое покрытие β пространства (Y,μ) и локально конечное открытое покрытие γ_f пространства (X,τ) такие, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_f\succ\alpha$.

Напомним[2], что покрытие α топологического пространства (X,τ) называется ξ- звездным, если $|St_\alpha(A)|\le\xi$ для любого $A\in\alpha$.

ЛЕММА 1. Если β-локально конечное открытое покрытие пространства (Y,μ), то $f^{-1}\beta$ является локально конечным открытым покрытием пространства (X,τ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β-локально конечное открытое покрытие пространства (Y,μ). Тогда $f^{-1}\beta$ является открытым покрытием пространства (X,τ). Покажем, что оно является локально конечным. Пусть $x\in X$ произвольная точка. Тогда для точки $y=f(x)$ существует окрестность $O_{f(x)}$ пересекающиеся лишь с конечным числам элементов покрытия β. В силу непрерывности отображения f следует, что множество $O_x=f^{-1}O_{f(x)}$ является окрестности точки x. Легко видеть, что окрестность O_x точки x пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $f^{-1}\beta$. Следовательно, $f^{-1}\beta$ является локально конечным покрытием пространства (X,τ).

ЛЕММА 2.Если α и β-локально конечные открытые покрытия пространства (X,τ), то $\alpha\wedge\beta$ также является локально конечным открытым покрытием пространства (X,τ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in X$- произвольная точка. Тогда существуют окрестности точки $x\in X$ $O_x^\alpha\ni x$ и $O_x^\beta\ni x$ такие, что $O_x^\alpha\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i, A_i\in\alpha, i=1,2,...,n$ и $O_x^\beta\subset\bigcup_{j=1}^{m}B_j, B_j\in\beta, j=1,2,...,m$. Положим $O_x^{\alpha\wedge\beta}=O_x^\alpha\cap O_x^\beta$. Легко видеть, что $O_x^{\alpha\wedge\beta}$ искомая окрестность точки $x\in X$, т.е. она пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\alpha\wedge\beta$. Итак, $\alpha\wedge\beta$-локально конечное открытое покрытие пространства (X,τ).

ЛЕММА 3.Если β - ξ-звездное открытое покрытие пространства (Y,μ), то $f^{-1}\beta$ является ξ-звездным открытым покрытием пространства (X,τ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β-ξ-звездно открытое покрытие пространства (Y,μ). Тогда $f^{-1}\beta$ является открытым покрытием. Положим $\alpha=f^{-1}\beta$. Покажем, что $|St_\alpha(A)|\le\xi$ для любого $A\in\alpha$. Пусть $A\in\alpha, A=f^{-1}B$, т.е. $|St_\beta(B)|\le\xi$. Следовательно, $|St_{f^{-1}\beta}(f^{-1}B)|\le\xi$, т.е. $|St_\alpha(A)|\le\xi$.

Значит, $f^{-1}\beta$ ξ-звездное открытое покрытие пространства (X,τ).

ЛЕММА 4.Если α и β - ξ-звездные открытые покрытия пространства (X,τ), то $\alpha\wedge\beta$ является ξ-звездным открытым покрытием пространства (X,τ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Пусть α и β - ξ-звездные открытые покрытия пространства (X,τ). Покажем, что $\alpha\wedge\beta=\{A\cap B: A\in\alpha, B\in\beta\}$ является ξ-звездным открытым покрытием пространства (X,τ).

Пусть $A\cap B\in\alpha\wedge\beta, A\in\alpha, B\in\beta$. Тогда $|St_\alpha(A)|\le\xi$, $|St_\beta(B)|\le\xi$. Ясно, что $|St_{\alpha\wedge\beta}(A\cap B)|\le\xi$. Следовательно, $\alpha\wedge\beta$ - ξ-звездное открытое покрытие пространства (X,τ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.Если $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) и $g:(Y,\mu)\to(Z,\eta)$ непрерывное отображение топологического пространства (Y,μ) в топологическое пространство (Z,η) являются паракомпактными, то отображение $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\eta)$ снова является паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ и $g:(Y,\mu)\to(Z,\eta)$ паракомпактные отображения. Пусть B_f - база отображения f, B_g - база отображения g. Покажем, что композиция $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\eta)$ также является паракомпактным отображением.

Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,μ) и локально конечное открытое покрытие γ_f состоящее из элементов B_f, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_f\succ\alpha$. В свою очередь для открытого покрытия β пространства (Y,μ) найдутся такие открытое покрытие λ пространства (Z,η) и локально конечное открытое покрытие δ состоящее из элементов B_g, что $g^{-1}\lambda\wedge\delta_g\succ\beta$. Легко видеть, что $(g\circ f)^{-1}\lambda\wedge(f^{-1}\delta_g\wedge\gamma_f)\succ\alpha$. Положим $f^{-1}\delta_g\wedge\gamma_f=\sigma_{g\circ f}$. Ясно, что σ_f является локально конечным открытым покрытием пространства (X,τ) состоящее из элементов базы $B_{g\circ f}$ отображения $g\circ f$. Следовательно, отображение $g\circ f$ является паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.Если $f:(X,\tau)\to Y$ паракомпактное отображение топологического пространства (X,τ) в одноточечное пространство Y, то пространство (X,τ) является паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,μ), где $Y=\{y\}$, и локально конечное открытое покрытие γ_f пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_f\succ\alpha$, т.е. $\gamma_f\succ\alpha$. Следовательно, (X,τ) является паракомпактным пространством.

ТЕОРЕМА 1.Если отображение f и пространство (Y,μ) являются паракомпактным, то пространство (X,τ) является паракомпактным. Обратно, если пространство (X,τ) является паракомпактным пространством, то отображение f является паракомпактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f,(Y,\mu)$ - паракомпактны. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда существуют такие открытое покрытие β пространства (Y,μ) и локально конечное открытое покрытие γ_f, состоящее из элементов базы B_f отображения f, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_f\succ\alpha$. В открытое покрытие β пространства (Y,μ) вписано локально конечное открытое покрытие λ. По лемме 1 покрытие $f^{-1}\lambda$ является локально конечным открытым покрытием пространства (X,τ). Легко видеть, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_f\succ\alpha$. Положим $f^{-1}\lambda\wedge\gamma_f=\delta$. Тогда согласно лемме 2 δ является локально конечным открытым покрытием пространства (X,τ). Итак, пространства (X,τ) является паракомпактным. Обратно, пусть (X,τ) является паракомпактным и α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Пусть B база топологии τ. Тогда существует локально конечное покрытие γ пространства (X,τ) вписанное в покрытие α. Ясно, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$ для любого открытого покрытия β пространства. Очевидно, что $B=B_f$. Не ограничивая общности можно считать, что $\gamma=\gamma_f$. Итак, отображение f - является паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.

Если $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) и

$g:(Y,\mu)\to(Z,\eta)$ непрерывное отображение топологического пространства (Y,μ) в топологическое пространство (Z,η) являются ξ-сильно паракомпактным, то отображение $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\eta)$ снова является ξ-сильно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательству предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.Если $f:(X,\tau)\to Y$ паракомпактное отображение топологического пространства (X,τ) в одноточечное пространство Y, то пространство (X,τ) является ξ-сильно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 2.

ТЕОРЕМА 2. Если отображение f и пространства. (Y,μ) являются ξ-сильно паракомпактным, то пространство (X,τ) является ξ-сильно паракомпактным. Если пространство (X,τ) является ξ-сильно паракомпактным, то отображение f является ξ-сильно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Пусть f и (Y,μ) - ξ-сильно паракомпактны и α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Тогда найдутся такие открытое покрытие β пространства (Y,μ) и ξ-звездное открытое покрытие γ_f пространства (X,τ), что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Т.к. пространство (Y,μ) является ξ-сильно паракомпактным , то существует ξ-звездное открытое покрытие θ пространства (Y,μ) которое вписано в β. Заметим, что $f^{-1}\theta$ является ξ-звездным открытым покрытием согласно лемме 3. Легко видеть, что покрытие $f^{-1}\theta\wedge\gamma_f$ вписано в покрытие α. Положим $\lambda=f^{-1}\theta\wedge\gamma_f$. По лемме 4 λ является ξ-звездным покрытием. Итак, пространства (X,τ) является ξ-сильно паракомпактным пространством. Обратно, пусть (X,τ) является ξ-сильно паракомпактным пространством. Тогда для любого открытого покрытия α пространства (X,τ) можно вписать ξ-звездное открытое покрытие γ. Ясно, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$ для любого открытого покрытия β пространства (Y,μ). Заметим, что база B пространства (X,τ) служить базой отображения f, т.е. $B=B_f$, следовательно $\gamma=\gamma_f$. Значит, отображение f является ξ-сильно паракомпактным.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.– Ф.: Илим, 1990.- 172 с.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013. - 160 с.
3. КеллиДж.Л. Общая топология.- М.: Наука, 1981.- 432 с.
4. Пасынков, Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств [Текст] / Б.А. Пасынков // Отображения и функторы. - М., 1984. - С. 72-102.
5. Энгелькинг Р. Общая топология.- М.: Мир, 1986.-752 с.

Рецензент: д.ф-м. н., профессор Чекеев А.А.