МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТРАНСПОРТ

Аблабекова Ч.А.

ОБ ОПЕРЕНИЯХ РАВНОМЕРНЫХ АБСОЛЮТОВ

Ch.A. Ablabekova

ON PLUMISITY OF UNIFORM ABSOLUTS

УДК 515.12

Доказано, что равномерное пространство равномерно веристо тогда и только тогда, когда равномерно перистым является его равномерный абсолют.

If is proved, that uniform spaces is pluming if and only if it's uniform absolute is uniformly pluming.

В работе используется обозначения и информация из книг [1], [2], [3], [4]. Любое равномерное пространство представляется как пара, (X,U) где X тихоновское ($\equiv$ вполне регулярное ([4])) - топологическое пространство и $(\mathscr{U})$- равномерность в терминах равномерных покрытий. Символ $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,ϑ). Если $f(X)=Y$, то $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ сюръективное отображение. Символ $f:X\to Y$ отображение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y, если $f(X)=Y$, то $f:X\to Y$ - сюръективное отображение. Если $A\subset X$, то $f^{\#}(A)$ - *малый образ* подмножества A при отображении $f:X\to Y$. Имеем $f^{\#}(A)=Y\setminus f(X\setminus A)=\left\{y\in Y:f^{-1}(y)\subset A\right\}$. Ясно, что $f^{\#}(A)=B$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(B)=A$. Для тихоновского пространства через U_f обозначается *тонкая (fine)* равномерность ([1], [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2]). Равномерное пространство (X,U) называется *равномерно* τ *- перистым*, если существует такая псевдоравномерность $(\vartheta\subset U)$, что выполнены следующие свойства:

(ϑP_1) вес; $w(\vartheta)\le\tau$

(ϑP_2) $\cap\{v(x):v\in\vartheta\}=B_x$ - бикомпакт в X для любой точки $x\in X$;

(ϑP_3) Система $\{v(B_x):v\in\vartheta\}$ - база окрестностей бикомпакта B_x в X для любой точки $x\in X$.

В случае, когда $\tau=\aleph_0$ равномерно $\aleph_0$- перистые пространства называются *равномерно перистыми равномерными пространствами.*

Пусть $B\in\vartheta$ база равномерность ϑ, состоящая из открытых равномерных покрытий. Для любого $\beta\in B$ положим $\beta^{\#}=f^{\#}(\beta)=\left\{f^{\#}(B):B\in\beta\right\}$ и $\mathscr{B}^{\#}=\left\{\beta^{\#}:B\in\beta\right\}$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f:(\mathrm{Y},\vartheta)\to(\mathrm{Z},\vartheta)$ *– сюръективное, замкнутое, неприводимые и равномерно непрерывное отображение и* $B\in\vartheta$ *база равномерности V, состоящая из открытых равномерных покрытий. Тогда* $\mathscr{B}^{\#}=\left\{\beta^{\#}:\beta\in\mathscr{B}\right\}$ *образует базу равномерности W.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\beta\in\mathscr{B}$, $\beta^{\#}$ является открытым покрытием Z. Это следует из сюръективности, замкнутости и неприводимости равномерно непрерывного отображения $f:(Y,V)\to(Z,W)$ ([5]).

Проверим выполнение аксиом базы равномерности.

1. Пусть $\beta_1,\beta_2\in\mathscr{B}$. Тогда $\beta_1\wedge\beta_2\in\mathscr{B}$, где $\beta_1\wedge\beta_2=\left\{B_1\cap B_2:B_1\in\beta,B_2\in\beta_2\right\}$. Для любых $B_1\in\beta,B_2\in\beta_2$ имеем $f^{\#}(B_1\cap B_2)=f^{\#}(B_1)\cap f^{\#}(B_2)$, т. е. $f^{\#}(\beta_1\wedge\beta_2)=f^{\#}(\beta_1)\wedge\ \wedge f^{\#}(\beta_2)$ и, следовательно, $f^{\#}(\beta_1)\wedge f^{\#}(\beta_2)\in\mathscr{B}^{\#}$, где $\beta_1^{\#}=f^{\#}(\beta_1)\in\mathscr{B}^{\#}$ и $\beta_2^{\#}=f^{\#}(\beta_2)\in\mathscr{B}^{\#}$.

2. Если $\alpha\in\mathscr{B}$ и $\beta\in\mathscr{B}$ таково, что β сильно звездно вписано в α, т. е. для любого $B\in\beta$ найдется такое $A_B\in\alpha$, что $\beta(B)\subset A_B$, то покрытие $\beta^{\#}$ звездно вписано в покрытие $\alpha^{\#}$, т. е. для любого $z\in Z$ найдется такое $A_z\in\alpha$, что $\beta^{\#}(z)\subset A_z^{\#}$. Действительно, так как $\beta^{\#}$- покрытие Z, то найдется такое

$B^{\#} \in \beta^{\#}$, что $z \in B^{\#}$, т. е. $f^{-1}(z) \subset B \in \beta$. Тогда, как мы отмечали выше, найдется такое $A_B \in \alpha$, что $\beta(B) \subset A_B$. Положим $A_z = A_B$. Покажем, что $\beta^{\#}(z) \subset A_z^{\#} = A_B^{\#}$. Пусть $\Gamma^{\#} \in \beta^{\#}$ такой произвольный элемент $\beta^{\#}$, что $z \in \Gamma^{\#}$ и $z' \in \Gamma^{\#}$ - произвольный элемент. Тогда $f^{-1}(z) \subset \Gamma$, $f^{-1}(z') \subset \Gamma$ и $f^{-1}(z) \subset B$ и имеем $f^{-1}(z) \subset \Gamma \cap B \neq \varnothing$, т. е. $f^{-1}(z') \subset \Gamma \subset \beta(B) \subset \quad \subset A_B = A_z$. Тогда $z' \in A_B^{\#} = A_z^{\#}$, т. е. $\beta^{\#}(z) \subset A_z^{\#}$.

Пусть $w \in \mathscr{W}$ - произвольное равномерное покрытие *Z*. В силу равномерной непрерывности отображения $f:(Y,V) \to (Z,W)$ найдется такое $v \in \mathscr{V}$, что покрытие $f(v)$ вписано в *W*. Пусть $\beta_v \in \mathscr{B}$ такое равномерное покрытие, что β_v вписано в покрытие v. Тогда открытое равномерное покрытие $\beta_v^{\#}$ вписано в $f(v)$ и, следовательно, в *W*. Это означает, что семейство $\mathscr{B}^{\#}$ - база равномерности *W*.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f:(Y,U) \to (Z,V)$ *сюръективное замкнутое неприводимое равномерно непрерывное отображение .Тогда из равномерной* τ *- перистности равномерного пространства* (X,U) *следует равномерная* τ *- перистность равномерного пространства* (Y,V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (ϑ,U) псевдоравномерность, удовлетворяющая свойствам (ϑP_1)-(ϑP_3) определения 1 и $\mathscr{B} \subset \mathscr{V}$ - база псевдоравномерности, состоящая из открытых равномерных покрытий. Тогда, в силу леммы 2, семейство из открытых равномерных покрытий $\mathscr{B}^{\#} = \left\{\beta^{\#} : \beta \in \mathscr{B}\right\}$ - база псевдоравномерности $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ на Y. Покажем, что для псевдоравномерности $\mathscr{W}$ выполняются свойства $(VP_1)-(VP_2)$ - определения 1, откуда следует равномерная τ - перистность пространства (Y,V). Ясно, что $\left|\mathscr{B}^{\#}\right| = \left|\mathscr{B}\right| \leq \tau$. Для любого $y \in Y$ пусть $x \in X$ такое, что $y = f(x)$. Так как $\mathscr{B}^{\#}$- база псевдоравномерности $\mathscr{W}$, то для любой точки $y \in Y$, $B_y = \cap\left\{\beta^{\#}(y) : \beta^{\#} \in B^{\#}\right\}$ - замкнуто в Y относительно топологии, порожденной псевдоравномерностью $\mathscr{W}$. Следовательно, B_y замкнуто в Y ([1], [2]). По условию $B_x = \cap\left\{\beta(x) : \beta \in B\right\}$- бикомпакт в X для любого $x \in X$. Покажем, что $f^{\#}(B_x) = B_y$. Пусть $z \in Y$ такая произвольная точка, что $f^{-1}(z) \subset B_x$.Тогда $f^{-1}(z) \subset \beta(x)$ для любого $\beta \in B$. Для любого $\beta \in B$ выберем $\alpha, \beta \in B$ таким образом, что γ - звездно вписано в α, а α сильно звездно вписано в β. Тогда $f^{-1}(z) \subset \gamma(x) \subset A_x \subset \left[A_x\right]_X \subset \alpha(A_x)$ и $f^{-1}(x) \cap A_x \neq \varnothing$. Тем более $f^{-1}(x) \cap \left[A_x\right]_X \neq \varnothing$. Для заданного отображения $f:(X,\mathscr{U}) \to (Y,\mathscr{V})$ имеем $f(\left[A_x\right]_x) = \left[f^{-\#}(A_x)\right]_Y$ ([5]), следовательно, $y \in \left[f^{-\#}(A_x)\right]_Y = \left[A_x^{\#}\right]_Y$, где $A_x^{\#} \in \alpha^{\#}$. Тогда $y \in \left[A_x^{\#}\right]_Y \subset \alpha^{\#}(A_x^{\#}) \subset \beta^{\#}(y)$ и $z \in f^{\#}(\left[A_x\right]_x) = \left[f^{-\#}(A_x)\right]_Y$, т. е. $z \in \beta^{\#}(y)$ для любого $\beta^{\#} \in B^{\#}$, т. е. $z \in B_y = \cap\left\{\beta^{\#}(y) : \quad \beta^{\#} \in B^{\#}\right\}$. Равенство $f^{\#}(\beta_x) = B_y$ доказано. Ясно, что $B_y \subset f(\beta_x)$ и, следовательно, B_y - бикомпактно, как замкнутое подпространство бикомпакта $f(B_x)$, для любого $y \in Y$.

Система $\left\{\beta^{\#}(B_y) : \beta^{\#} \in \mathscr{B}^{\#}\right\}$ определяет базу окрестностей бикомпакта B_y в X, U. Пусть O - произвольное открытое множество в Y, содержащее бикомпакт B_y, т.е. $B_y \subset O$. Тогда $f^{-1}(O)$ открыто в X, U и $B_x = f^{-1}(B_y) \subset f^{-1}(O)$. Следовательно, существует такое $\beta \in \mathscr{B}$, что $B_x = \beta(B_x) \subset f^{-1}(O)$.Тогда из, легко доказуемых равенств, $f^{\#}(\beta(B_x)) = \beta^{\#}(B_y)$, $f^{-1}(\beta^{\#}(B_y)) = \beta(B_x)$, имеет место включение: $f^{\#}(B_x) = (B_y) \subset \quad \subset \beta^{\#}(B_y) \subset f^{\#}(f^{-1}(x)) \subset O$, которое доказывает, что $\left\{\beta^{\#}(B_y) : \beta^{\#} \in B^{\#}\right\}$ является базой окрестностей бикомпакта B_y для любой точки $y \in Y$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть* $f:(X,U)\to(Y,U)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда если* X,U *равномерно перистое равномерное пространство, то* Y,U *также равномерно перисто.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы при $\tau=\aleph_0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть* $f:X\to Y$ *сюръективное, замкнутое неприводимое отображение .Тогда если X – перистый паракомпакт, то Y также перистый паракомпакт*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Для тонких равномерностей U_f и ϑ_f на X и Y, соответственно имеем равномерно непрерывное отображение $f:(X,U_f)\to(Y,U_f)$, удовлетворяющее теореме 3. Так как X - перистый паракомпакт ([5]), то X,U_f является равномерно перистым пространством.

Это следует из известной характеристики перистых паракомпактов ([5]). Тогда из теоремы 3 следует, что (Y,ϑ_f)-равномерно перистое пространство, следовательно, из [6] следует, что Y– перистый паракомпакт.

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $(\dot{X},\dot{U})$ *равномерный абсолют равномерного пространства* (X,U). *Тогда следующие условия равносильны:*

1. (X,U) *– равномерно* τ *– перисто*
2. $(\dot{X},\dot{U})$ *– равномерно* τ *– перисто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация ($1\Rightarrow 2$) доказана С. С. Токсонбаевым ([6]).

($2\Rightarrow 1$). Естественная проекция $\pi_x:(\dot{X},\dot{U})\to(X,U)$ ([2]) равномерного абсолюта $(\dot{X},\dot{U})$ на равномерное пространство (X,U) является равномерно совершенным неприводимым отображением, следовательно отображение $\pi_x:(\dot{X},\dot{U})\to$ – удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда из равномерной τ - перистости $(\dot{X},\dot{U})$ следует равномерная τ - перистость (X,U). Теорема доказана.

Литература:

1. Isbell J.R. Uniform spaces. – Providence. - 1964.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
3. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.
4. Энгелькинг Р., Общая топология. - М. Мир, 1986.
5. Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Мат. сб. - 1965. – Т.97.- № 31.- С. 55-85.
6. Токсонбаев С. С. Об абсолютах равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображениях // Канд. дисс. - Бишкек. - 2013.

Рецензент: д.ф-м.н, доцент Канетов Б.Э.