Омуралиев М.К.

СИНГУЛЯРДЫК ТАТААЛ ЛАГЕРСТРОМДУК ТАПШЫРМАЛАРДЫ ҮЧТӨН АЗ ЭКИДЕН КӨП ӨЛЧӨМДӨГҮ СТРУКТУРАЛЫК БИРИКТИРҮҮ МЕТОДУ МЕНЕН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫН КУРУУ

Омуралиев М.К.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛАГЕРСТРОМА МЕТОДОМ СТРУКТУРНОГО СРАЩИВАНИЯ В СЛУЧАЕ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ ДВУХ, НО МЕНЬШИХ ТРИ

M.K. Omuraliev

THE CONSTRUCTION OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SINGULAR PERTURBED PROBLEM LAGERSTROM METHOD FOR STRUCTURAL BONDING IN THE CASE OF DIMENSION MORE THAN TWO, BUT LESS THAN THREE

УДК517.928

Методом структурного сращивания строится асимптотика решения обобщенной модельной задачи Лагерстрома размерности два, но не меньше три.

Method structural splice is constructed asymptotics of the solution of the generalized model problem Lagerstrom two dimensions, but not less than three.

1. Введение.

1950 г. А.А. Лагерстром [1], для изучения уравнения Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса, предложил следующую модельную задачу

$$\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}+\frac{n-1}{r}(r)+\xi(r)\frac{d\xi(r)}{dr}=0,\ \xi(\varepsilon)=0,\ \xi(\infty)=1,$$

где ε – малый положительный параметр, *n*– размерность пространства (лапласиана), $r\in[1,\infty)$ - независимая переменная, $\xi(r)$ - неизвестная функция.

Для построения асимптотики решения этой задачи применены метод сращивания, метод структурного сращивания, метод интегральных уравнений, геометрический метод, метод фиктивного параметра [1-13]. Историю вопроса этой задачи можно найти, например в [13].

2. Постановка задачи

Здесь рассматривается задача

$$\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}+\frac{\alpha}{r}(r)+\xi(r)\frac{d\xi(r)}{dr}=0,\ \xi(\varepsilon)=0,\ \xi(\infty)=1,$$

Здесь действительное число α, такое что $2<\alpha<3$. В работе исследован случай $1<\alpha<2$.

В этой задаче удобно сделать подстановку $r=\varepsilon x,\ \xi=1-y(x),$ тогда имеем следующую задачу

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+(\frac{\alpha}{x}+\varepsilon)\frac{dy}{dx}=\varepsilon y(x)\frac{dy}{dx},\ y(1)=1,\ y(\infty)=0. \tag{1}$$

Надо построить асимптотику решения задачи (1) на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\infty)$.

3. Структура внешнего решения

Определение 1. Переменную x назовем внешней переменной.

Определение 2. Внешним решением задачи (1), назовем решение этой задачи, которое удовлетворяет условию $y(1)=0, y'(1)=a$, где $a=const$ – пока не определено и существует на конечном, но на большом отрезке, $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$

Внешнее решение ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \tag{2}$$

где $y_j\left(x\right)$ – пока неопределенная функция на отрезке $J(\varepsilon)$, при чем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$y_0\left(1\right)=0,\ y_0{}'\left(1\right)=a,\ y_k\left(1\right)=0,\ y_k{}'\left(1\right)=0\ \ (k=1,2,\ldots)\ .$$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)\,(j=0,1,2,\ldots)$ имеем следующие уравнения:

$$Ly_0\left(x\right)=\frac{d^2y_0\left(x\right)}{dx^2}+\frac{\alpha}{x}\frac{dy_0\left(x\right)}{dx}=0,\ \ y_0\left(1\right)=0,\qquad \frac{dy_0\left(1\right)}{dx}=a \tag{3.0}$$

$$Ly_1\left(x\right)=-\frac{dy_0\left(x\right)}{dx}+y_0\left(x\right)\frac{dy_0\left(x\right)}{dx},\ \ y_1\left(1\right)=0,\ \frac{dy_1\left(1\right)}{dx}=0\,, \tag{3.1}$$

$$Ly_2\left(x\right)=-\frac{dy_1\left(x\right)}{dx}+\frac{dy_0\left(x\right)}{dx}\frac{dy_1\left(x\right)}{dx}+\frac{dy_0\left(x\right)}{dx}y_1\left(x\right),\ y_2\left(1\right)=0,\frac{dy_2\left(1\right)}{dx}=0\,, \tag{3.2}$$

……………………………………..

$$Ly_m\left(x\right)=-\frac{dy_{m-1}\left(x\right)}{dx}+\sum_{i+j=m-1}y_i\left(x\right)\frac{dy_j\left(x\right)}{dx},\ y_m\left(1\right)=0,\ \ \frac{dy_m\left(1\right)}{dx}=0\,, \tag{3.n}$$

....

Решение задачи (3.0) представляется в виде:

$$\frac{dy_0}{dx}=a\,x^{-\alpha},\ \ y_0(x)=1-\frac{a}{1-\alpha}+\frac{a}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\sim O(1),x\to\infty. \tag{4.0}$$

Используя (3.0), для определения $y_1\left(x\right)$ имеем уравнение

$$L\,y_1\left(x\right)=\frac{a^2}{1-\alpha}[-x^{-\alpha}+x^{1-2\alpha}],\ \ y_1\left(1\right)=0,\quad y_1{}'\left(1\right)=0\,,$$

Решая это уравнение получим

$$y_1{}'\left(x\right)=c_1x^{-\alpha}-\lambda x^{1-\alpha}+\frac{\lambda}{2-\alpha}x^{2-2\alpha}\,(c_1=\frac{\alpha-1}{\alpha-2},\lambda=\frac{a^2}{1-\alpha}).$$

Отсюда,

$$y_1\left(x\right)=\frac{c_1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}-\frac{\lambda}{2-\alpha}x^{2-\alpha}+\frac{\lambda}{(2-\alpha)2-\alpha}x^{3-2\alpha}\ . \tag{4.1}$$

Уравнения для определения $y_2(x)$ используя (4.1) и (4.2) запишется в виде:

$$Ly_2\left(x\right)\sim a^3\gamma_1x,\ \ (\gamma_1=const)\ \ \ x\to\infty.$$

Решая это уравнение получим

$$y_2{}'(x)\sim\gamma_2\,a^3x,\ \ y_2(x)\sim\beta_2\,a^3x^3,\ x\to\infty.$$

Здесь, и далее через γ_k,β_k - обозначим некоторые действительные постоянные.

Методом полной математической индукции, легко показать, что

$$y_n\left(x\right)\sim\gamma_n\,a^{n+1}x^{n+1},\ x\to\infty\ . \tag{4.n}$$

Таким образом, внешнее решение (2) имеет следующую структуру

$$y(x,\varepsilon)\sim 1+a\frac{1}{\alpha-1}+\gamma_1 a^2\varepsilon x^{1-\alpha}+\gamma_2\varepsilon^2(ax)^3+\ldots$$
$$+\gamma_3\varepsilon^3(ax)^4+\ldots+\gamma_n\varepsilon^n(ax)^{n+1}+\ldots=1+a\frac{1}{\alpha-1}+\gamma_1 a^2\varepsilon x^{1-\alpha} \tag{5}$$
$$+\varepsilon^2(ax)^3[\beta_0+\beta_1\varepsilon ax+\ldots+\beta_n(\varepsilon ax)^{n+1}+\ldots],\ x\to\infty$$

Если в (5) положить $x=\varepsilon^{-1}$, то имеем

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon)=1+a\frac{1}{\alpha-1}+\gamma_1 a^2\varepsilon^{\alpha}+a\varepsilon^{-1}[\beta_0+\beta_1 a+ \tag{6}$$
$$+\beta_2 a^2+\ldots+\beta_n a^n+\ldots]$$

Если, постоянную a выберем равную, $a=\varepsilon$ то выражение (6) запишется в виде:

$$y(\varepsilon^{-1},\varepsilon)=1+\varepsilon\frac{1}{\alpha-1}+\gamma_1 a^2\varepsilon^{\alpha}+[\beta_0+\beta_1\varepsilon+$$
$$+\beta_2\varepsilon^2+\ldots+\beta_n\varepsilon^n+\ldots]$$

Справедлива

Теорема 1. Внешнее решение (2) является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$, другими словами, если его представить в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\varepsilon^{n+1}R_{n+1}(x,\varepsilon), \tag{8}$$

тогда для остаточного члена $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le l\varepsilon^{n+1}, \tag{9}$$

где l – некоторая не зависящая от ε положительная постоянная.

Строгое доказательство можно провести методом мажорант.

4. Внутреннее и полное решение

Теперь построим внутреннее решение, которое удовлетворяет условию на бесконечности. Для этого введем внутреннюю переменную t

$$t=x\varepsilon \tag{10}$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$u''(t)+\left(1+\frac{\alpha}{t}\right)u'(t)=u(t)u'(t) \tag{11}$$

где $u(t)=y(x)/_{x=t\varepsilon^{-1}}$

Определение 3. Переменную t назовем внутренней, а функцию $u(t)$ внутренним решением, причем внутреннее решение удовлетворяет краевому условию на бесконечности $u(\infty)=0.$.

Оказывается, что внутреннее решение (13) существует не только в некоторой окрестности точки $t=\infty$, но и на всем отрезке $I(\varepsilon)=[\varepsilon,\infty)$, т.е. мы решаем уравнение (11) со следующими граничными условиями

$$u(\varepsilon)=1,\ u(\infty)=0\,. \tag{12}$$

Решение задачи (11)- (12) ищем в виде:

$$U(t,\mu)=\varepsilon u_0(t)+\varepsilon^2 u_1(t)+\ldots+\varepsilon^n u_{n-1}(t)+\ldots \tag{13}$$

Тогда для определения $u_j(t)$ получим следующие уравнения:

Тогда для определения $u_j(t)$ получим следующие уравнения:

$$Mu_0(t)=u_0''(t)+(\frac{\alpha}{t}+1)u_0'(t)=0, u_0(\varepsilon)=\varepsilon^{-1},\ u_1(\infty)=0, \tag{14.0}$$

$$Mu_1(t)=u_0(t)u_0'(t), u_1(\varepsilon)=u_1(\infty)=0, \tag{14.1}$$

$$Mu_2(t)=u_0(t)u_1'(t)+u_1'(t)u_0(t),\ u_2(\varepsilon)=u_2(\infty)=0, \tag{14.2}$$

....

$$Mu_n(t)=\sum_{i+j=n-1}u_i(t)u_j'(t),\ u_n(\varepsilon)=u_n(\infty)=0, \tag{14.n}$$

....

Однородное уравнение (14.0) имеет два линейно независимых решений

$$U_1(t)=1, U_2(t,\varepsilon)=c_\alpha\int_\varepsilon^t s^{-\alpha}e^{-s}ds, c_\alpha=c_\alpha(\varepsilon)=[\int_\varepsilon^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds]^{-1}=O(\varepsilon^{\alpha-1}). \tag{15}$$

Краевая задача (14.0) имеет единственное решение

$$u_0(t)=\varepsilon^{-1}K(t,\varepsilon);\ K(t,\varepsilon)=c_\alpha\int_t^\infty s^{-\alpha}e^{-s}ds.$$

Очевидно, что для функции $K(t,s)$ имеет место оценка $0\le K(t,\varepsilon)\le 1, \left|K_t'(t,\varepsilon)\right|\le c_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}$.

Поэтому, для функций $u_0(t), u_0'(t)$ имеет место оценки $0\le u_0(t,\varepsilon)\le\varepsilon^{-1}, \left|u_t(t,\varepsilon)\right|\le\varepsilon^{-1}c_\alpha t^{-\alpha}e^{-t}$.

Краевые задачи (14.n), n=1,2,… лучше решать методом функции Грина. Нулевая краевая задача $u_0(\varepsilon)=u_0(\infty)=0$ для однородного уравнения в силу (15) имеет только нулевое решение.

Лемма 1. Однородная задача

$$Mz(t)=0,\ z(\varepsilon)=z(\infty)=0$$

имеет функцию Грина

$$G(t,s,\varepsilon)=-c_\alpha^{-1}U_2(t,\varepsilon)K(s,\varepsilon),\ \varepsilon\le t\le s,$$
$$G(t,s,\varepsilon)=-c_\alpha^{-1}U_2(s,\varepsilon)K(t,\varepsilon),\ s\le t<\infty.$$

Лемма 2. Неоднородное уравнение

$$Mz(t)=f(t),\ z(\varepsilon)=0,\quad z(\infty)=0$$

где $f(t)\in C[\varepsilon,\infty)$, имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t)=\int_\varepsilon^\infty s^\alpha e^s G(t,s,\varepsilon)f(s)ds. \tag{16}$$

Решение нулевой краевой задачи (14.1) в силу (16) запишется в виде

$$u_1(t)=\int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon)u_0(s)u_0'(s)ds.$$

Используя выражение для функции Грина, отсюда получим

$$u_1(t)=-\varepsilon^{-1}c_\alpha\int_\varepsilon^\infty G(t,s,\varepsilon)u_0(s)ds=\varepsilon^{-1}\int_\varepsilon^t K(t,\varepsilon)U_2(s,\varepsilon)u_0(s)ds+$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_t^\infty U_2(t,\varepsilon)K(s,\varepsilon)u_0(s)ds\le\varepsilon^{-1}\int_\varepsilon^t U_2(s,\varepsilon)u_0(s)ds+\int_t^\infty u_0^2(s)ds\le$$
$$\le\varepsilon^{-2}\int_\varepsilon^t K(s,\varepsilon)ds+\varepsilon^{-2}\int_t^\infty K(s,\varepsilon)ds$$
$$\le\varepsilon^{-2}\int_\varepsilon^\infty K(s,\varepsilon)ds\le\varepsilon^{-2}c_\alpha\int_\varepsilon^\infty\int_s^\infty\tau^{-\alpha}e^{-\tau}d\tau ds$$

Отсюда , после интегрирования по частям имеем

$$u_1(t) \le \varepsilon^{-2} c_\alpha c_{\alpha-1} \square \frac{\alpha-1}{\varepsilon(\alpha-2)}.$$

Для производной этой функции имеем оценку

$$\left|u_1'(t)\right| \le \frac{\alpha-1}{\varepsilon(\alpha-2)} t^{-\alpha} e^{-t}.$$

Далее методом математической индукции получим $u_k(t) \le l\varepsilon^{-1}, \left|u_k{}'(t)\right| \le l\varepsilon^{-1} t^{-\alpha} e^{-t} \quad (k = 0,1,2,...).$
(17)

Отсюда, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Решение задачи (1) представляется в виде асимптотического ряда (13), для членов которого имеет место оценки (17).

Замечание 1. Из теоремы 2 вытекает асимптотический характер внешнего ряда (2). Однако, можно показать, что этот ряд равномерно сходится на отрезке $I\left(\varepsilon\right)$.

Замечание 2. Теорема 2 является другим представлением результата полученного в [20-21].

5. Заключение

Метод структурного сращивания позволил получить решение задачи уравнения Лагерстрома на всем рассматриваемом бесконечном отрезке .

Литература:

1. Lagerstrom P.A. Matched asymptotic expansions. Ideas and techniques. Springer-Verlag, 1988.
2. [Hinch E.J. Perturbation methods. Cambridge university press, 1981.
3. Kevorkian J., Cole J.D. Perturbation methods in applied mathematics, Springer-Verlag, 1981.
4. Hastings S.P., Mcleod J.B. Classical methods in ordinary differential equations, with applications to boundary value problems. AMS, 2012.
5. Suchdev P.L. Nonlinear ordinary differential equations and their applications.Vercel Dekker, Inc.,1991.
6. Skinner L.A. Note on Lagerstrom singular perturbation models. SIAM J.Appl. Math.,1981, v. 41,N.2, 362-364 p.
7. Алымкулов К.,Толубаев Ж. Решение модельной задачи Lагерстрома. Матем. заметки, т.56, вып. 4,1994. С.3-8.
8. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания. Тезисы докл. межд. конф.Функц. анализ и его приложения. Астана, 2012, 2-5 октября. С.106-107.
9. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности два методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ 2013, N1. С.55-60 .
10. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности три, методом структурного сращиванияк. Вестник ОшГУ 2013, N1. С.61-65.
11. Алымкулов К., Зулпукаров Ф.З.,Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи лагерстрома размерности два, методом структурного сращивания, Вестник ОшГУ 2013, N2. С. 173-176.
12. Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности четыре, методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ, 2013, N2. С. 192-196.
13. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома методом структурного сращивания, в случае нецелой размерности. К.Алымкулов, М.К. Омуралиев. Поиск, 1.- 2014, С.75-80.

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Табышов Р.Т.