МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Омуралиев М.К.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛАГЕРСТРОМА РАЗМЕРНОСТИ ЧЕТЫРЕ, МЕТОДОМ СТРУКТУРНОГО СРАЩИВАНИЯ

M.K. Omuraliev

THE CONSTRUCTION OF ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED GENERALIZED PROBLEM LAGERSTROM OF DIMENSION FOUR, THE METHOD OF STRUCTURAL SPLICE

УДК:621.1102

Методом структурного сращивания строится асимптотика решения обобщенной модельной задачи Лагерстрома размерности три.

It is constructed an asymptotic of the solution of the generalization Lagerstrom's model problem of the dimension three.

1.Введение.

Рассматривается обобщенная задача Лагерстрома

$$y''(x)+(3x^{-2}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=\beta(y'(x))^2,\ y\ \ (1)=1,\ y(\infty)=0 \qquad (1)$$

Где $0<\varepsilon<<1-$малый параметр, $0<\beta$ – постоянная, $r\in[1,\infty)$ – независимая переменная, $u(r)$-неизвестная функция.

Здесь методом структурного сращивания [1-2] строится равномерная асимптотика решения этой задачи.

Отметим, что асимптотика решения уравнения (1) при $\beta=0$, т.е.

$$y''(x)+((n-1)x^{-1}+\varepsilon)y'(x)-\varepsilon y(x)y'(x)=0,\quad y\ \ (1)=1,\ y(\infty)=0 \qquad (1^*)$$

при $n=2,3,4$ построены в [4-6] методом структурного сращивания. Историю этой задачи и литературу по этой проблеме можно найти в [3].

Существование и единственность решения задачи (1^*) изложены в [6-7].

2. Структура внешнего решения

Определение 1. Переменную x назовем внешней переменной.

Определение 2. Внешним решением задачи (1), назовем решение этой задачи, которое удовлетворяет условию $y(1)=0, y'(1)=a,$ где $a=const$ – пока не определена и существует на конечном, но на большом отрезке $J(\varepsilon)=[1,\varepsilon^{-1}]$.

Внешнее решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y\ \ (1)=1, y'(1)=a$ ищется в виде:

$$Y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \qquad (2)$$

где $y_j(x)$ – пока неопределенные функции на отрезке $J(\varepsilon)$, при чем эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$y_0(1)=0,\ y_0^{'}(1)=a$, $y_k(1)=0,\ y_k^{'}(1)=0\ \ (k=1,2,\ldots)$

Подставляя (2) в (1) для определения $y_j(x)\,(j=0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$y_0''(x)+\frac{3}{x}y_0'(x)-\beta y'^{\,2}_0(x)=0,\quad y_0(1)=1,\quad y_0'(1)=a, \qquad (3.0)$$

$$Ly_1 := y_1''(x) + \frac{3}{x}y_1' - 2\beta y_0'(x)y_1'(x) = -y_0'(x) + y_0 y_0'(x), \tag{3.1}$$

$$Ly_2 = -y_1' + \beta y_1^{\,2} + y_0 y_1' + y_1 y_0', \quad y_2(1) = y_2'(1) = 0, \tag{3.2}$$

$$Ly_3 = -y_2' + 2\beta y_1' y_2' + y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_2 y_0', \quad y_3(1) = y_3'(1) = 0, \tag{3.3}$$

$$Ly_4 = -y_3' + 2\beta y_2'^2 + 2\beta y_1' y_3' + \sum_{i+j=3} y_i y_1', \quad y_4(1) = y_4'(1) = 0, \tag{3.4}$$

$$Ly_5 = -y_4' + 2\beta y_1' y_4' + 2\beta y_2' y_3' + \sum_{i+j=4} y_i y_j', \;\; y_5(1) = y_5' = 0, \tag{3.5}$$

$$Ly_6 = -y_5' + \beta y_3^{\,2} + 2y_1' y_5' + 2y_2' y_4' + \sum_{i+l=5} y_i y'_j, \;\; y_6(1) = y_6'(1) = 0, \tag{3.6}$$

$$Ly_{2m} = -y_{2m-1}' + \beta y_m^{\,2} + \sum_{\substack{i+j=6 \\ i;j\ge 1 \\ i\ne j}} y_i' y_j' + \sum_{i+j=2m-1} y_i y_j', \tag{3.2m}$$

$$y_{2m}(1) = y_{2m}'(1) = 0,$$

$$Ly_{2m+1} = -y_{2m}' + \sum_{\substack{i+j=2m+1 \\ i,j\ge 1}} y_i'(x) y_j'(x) + \sum_{i+j=2m} y_i y_j'(x), \tag{3.2m+1}$$

$$y_{2m+1}(1) = y_{2m+1}(1) = 0,$$

Уравнение (3.0) является уравнением Бернулли и его можно решить следующим образом.

$$y'_0 = z \Rightarrow z_0' + \frac{3}{x} z_0 = \beta z_0^2 \Rightarrow \frac{z'_0}{z_0} + \frac{3}{x}\frac{1}{z_0} = \beta .$$

Если ввести обозначение

$$v_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{y'_0(x)}, \;\; v_0(1) = a^{-1} := b \; ,$$

Тогда

$$v'_0(x) = \frac{3}{x} v_0 - \beta \Rightarrow v_0(x) = x^3[b - \beta\int_1^x s^{-3} ds] = (b - 2^{-1}\beta)x^2 + 2^{-1}\beta x .$$

Отсюда

$$y'_0(x) = \frac{2}{x^3(2b-\beta) + \beta x} \Rightarrow$$

$$y_0(x) = 1 + 2\int_1^x \frac{ds}{s\left(\beta + \gamma s^2\right)} = \left|\gamma = 2b - \beta\right| = \tag{4.0.1}$$

$$= \frac{2}{\beta}\int_1^x \left[\frac{1}{s} - \frac{\gamma s}{\beta + \gamma s^2}\right] = 1 + \frac{1}{\beta}\ln\frac{2bx^2}{\beta + \gamma x^2}$$

Далее мы будем считать, что a=0(1), $\varepsilon \to 0$ или b=a^{-1}$\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Тогда (4.0.1.) можно записать в виде

$$y_0(x) = 1 + A + \ln\frac{1}{1 + \beta\gamma^{-1}x^{-2}} \;\square\; 1 + A + O(x^{-2}), \tag{5.0}$$

где $A=\ln\frac{2b}{\gamma}=\ln\frac{1}{1-(2b)^{-1}\beta}=\ln\frac{1}{1-2^{-1}a\beta} \square -\frac{\beta a}{2}$

Из (4.0.1) (или из (5.0)) имеем

$$y'_0(x))=O(x^{-3}),\quad x\to\infty \qquad (5.1)$$

Используя (5.0) и (5.1), уравнение (3.1) запишется в виде

$$Ly_1=\left(y_0-1\right)y'_0\left(x\right)=O(a\,x^{-3}),\quad x\to\infty..$$

Если обозначить $z_1=y'_1\left(x\right)$, то это уравнение имеет вид

$$z'_1+\left(3x^{-1}-2\beta y'_0\left(x\right)\right)z_1=O(a\,x^{-3}),\quad x\to\infty.$$

Отсюда имеем

$$y'_1\left(x\right)=z_1\left(x\right)=O(a\,x^{-2}),\quad x\to\infty.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\begin{aligned} y'_1\left(x\right)&=O(a^2\,x^{-1}),\quad x\to\infty\\ y_1\left(x\right)&=O(a^2\ln x),\quad x\to\infty \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Учитывая (5.0)-(5.1) уравнение для определения $y_2(x)$ можно записать в виде

$$Ly_2=\left(y_0-1\right)y'_1+\beta y'^2_1+y_1y'_0=O(a^3x^{-1}),\quad x\to\infty$$

или

$$\left(y'_2\right)'+\left(3x^{-1}-2\beta y'_0\right)y'_2\sim O(a^3x^{-1}),\quad x\to\infty$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y'_2\left(x\right)&=O(a^3\ln x),\quad x\to\infty\\ y_2\left(x\right)&=O(a^3x\ln x),\quad x\to\infty \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Используя (5.0), (5.1), (5.2) уравнение для определения функций $y_3(x)$ запишется в виде

$$Ly_3=(y_0-1)y_2'+2\beta y_1'y_1'++y_2y_0'=O(a^4\ln x),\ x\to\infty.$$

Или

$$\left(y'_3\right)'+\left(2x^{-1}-2\beta y'_0\left(x\right)\right)y'_3\left(x\right)=O(a^4\ln x),\ x\to\infty..$$

Отсюда

$$y'_3\left(x\right)=O(a^4x\ln x),\quad x\to\infty$$

$$y_3\left(x\right)=O(a^4x^2\ln x),\quad x\to\infty$$

Уравнение для определения функции $y_4\left(x\right)$ можно записать в виде

$$Ly_4=(y_0-1)y_3'+2\beta y_1'y_3'++y_2y_1'+y_3y_0'=O(a^5x\ln x),\ x\to\infty.$$

Или

$$\left(y'_4\right)'+\left(2x^{-1}-2\beta y'_0\left(x\right)\right)y'_4\left(x\right)=O(a^5x\ln x),\ x\to\infty.$$

Интегрируя это выражение получим

$$y'_4\left(x\right)=O(a^5x^2\ln x),\quad x\to\infty$$

$$y_4\left(x\right)=O(a^5x^3\ln x),\quad x\to\infty$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$y'_n\left(x\right)=a^3\ln x\,O\left(a\,x\right)^{n-2},\quad x\to\infty$$

$$y_n\left(x\right)=a^2\ln x\,O\left(a\,x\right)^{n-1},\quad x\to\infty$$

Таким образом, внешнее решение задачи (1)-(2) запишется в виде

$$Y(x,\varepsilon) \sim 1 + a + \varepsilon a^2 \ln x\{[\lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon a x + \lambda_2 (\varepsilon a x)^2 + ... + \lambda_{n-1} (\varepsilon a x)^{n-1} + ...] ,$$

где λ_k – некоторые положительные числа.

Если неизвестное число a взять в виде $a = \varepsilon$ то ряд (6) является асимптотическим рядом по малому параметру ε на отрезке $J(\varepsilon) = [1, \varepsilon^{-1}]$. Таким образом доказана

Теорема 1. Если взять внешнее решение с начальным условием $y(1)=1$, $y'(1) = a = \varepsilon$, то оно является асимптотическим рядом на отрезке J(ε).

Теперь построим внутреннее решение удовлетворяющее условию $y(\infty)=0$.

Для этого в (1) сделаем подстановку $t=x\varepsilon$, тогда оно запишется в виде

$$y''(t) + \left(\frac{3}{t} + 1\right) y'(t) = \beta \left(y'(t)\right)^2 + y(t) y'(t) \tag{8}$$

где $u(t,\varepsilon) = y(x,\varepsilon)\Big|_{x = t\varepsilon^{-1}}$.

Определение 2. Переменная t называется внутренней переменной, а решение уравнения (8) внутренним решением задачи (1).

Оказывается внутреннее решение уравнение (8) существует не только в окрестности бесконечной точки $x = \infty$, но и на всем отрезке $t \in [\varepsilon, \infty)$ или $x \in [1, \infty)$. Поэтому уравнение (8) решается с краевыми условиями:

$$u(\varepsilon) = 1,\ u(\infty) = 0. \tag{9}$$

Теорема 2. Решение задачи (8)-(9) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t,\varepsilon) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon) + ... + u_n(t,\varepsilon) + \tag{10}$$

где $u_k(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^k),\ u'_k(t) = O(\varepsilon^k),\ (k = 0,1,2,...)$, т.е. $u_k(t,\varepsilon)$ – является асимптотической последовательностью и удовлетворяют краевым условиям

$u_0(0) = 1, u_0(\infty) = 0;\ u_k(0) = 1, u_k(\infty) = 0\ (k = 1,2,...).$

Подставляя (10) в (8) для определения функций $u_k(t,\varepsilon) = u_k(t)$ получим уравнения:

$$Mu_0(t) \equiv u''_0(t) + (3 + t^{-1}) u'_0(t) = 0, \qquad u_0(\varepsilon) = 1,\ u_0(\infty) = 0 \tag{11.0}$$

$$Mu_1(t) = \beta (u'_0(t))^2 + u_0(t) u'_0(t), \qquad u_1(\varepsilon) = u_1(\infty) = 0 \tag{11.1}$$

$$Mu_2(t) = 2\beta u'_0 u'_1(t) + u_0 u'_1(t) + u_1 u'_0(t), \qquad u_2(\varepsilon) = u_2(\infty) = 0 \tag{11.2}$$

$$Mu_3(t) = 2\beta u'_0 u'_2(t) + (u'_1(t))^2 + u_0 u'_2(t) + u_1 u'_1 + u_2 u'_0(t),\ u_3(\varepsilon) = u_3(\infty) = 0 \tag{11.3}$$

Далее, существования и оценки решений этих задач доказывается применением функции Грина.

Литература:

1. Алымкулов К., Зулпукаров А.З. Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью, ДАН (Россия). –Москва, 2004, т. 398, №5. С.583-586.
2. Алымкулов К., Жээнтаева Ж.К. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. ДАН (Россия). – Москва, 2004, т. 398, №6. С.1-4.
3. Алымкулов К., Жээнтаева Ж.К. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Матем. заметки, 2006, т.79, вып. 5, С. 643-652.
4. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности два, методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ, №1, 2013, С.55-60.
5. Алымкулов К., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности три, методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ, №1, 2013, С.61-65.
6. Алымкулов К., Зулпукаров А., Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной обобщенной задачи Лагерстрома размерности два, методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ, №2, 2013, С.173-176.
7. Омуралиев М.К. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Лагерстрома размерности четыре, методом структурного сращивания. Вестник ОшГУ, №2, 2013, С.192-196.
8. Hastings S.P., Mcleod J.B. Classical methods in ordinary differential equations, with applications to boundary value problems. AMS, 2012.
9. Suchdev P.L. Nonlinear ordinary differential equations and their applications. Vercel Dekker, Inc.,1991.

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Табышов Р.Т.