

Жуаспаев Т.А.

**СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБОБЩЕННОГО
КОЭФФИЦИЕНТА**

T.A. Zhuaspaev

ADJOINT PROBLEM IDENTIFICATION GENERALIZED COEFFICIENT

УДК: 624/012.45

Изучается теплообмен в ненасыщенном грунте. Задаются температура грунта и воздуха на поверхности земли. Для того чтобы определить обобщенный коэффициент теплообмена в почве составляются прямая и сопряженная задачи.

Studied heat transfer in unsaturated soil. Set the temperature of the soil and air at the surface. In order to determine a generalized heat transfer coefficient in soil is direct and adjoint problems.

Рассматривается следующая задача [1]:

$$C \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad z \in (0, H), \quad t \in (0, t_{\max}), \quad (1)$$

$$\theta|_{t=0} = \varphi(x), \quad \theta|_{z=0} = T_1, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} = -N(t)(\theta|_{z=H} - T_0(t)). \quad (3)$$

Будем искать $N(t)$ обобщенный коэффициент теплообмена. Ось z направлена вверх, начало координат находится на неизменном слое температуры почвы. Дополнительно задается измеренное значение температуры грунта на поверхности земли $T_g(t)$ и температура воздуха на поверхности земли $T_b(t)$.

Задача решается итерационным способом. Пусть n – итерационный параметр. В этом случае $N(t)$ определяются итерационными величинами $N(t, n)$, $n = 0, 1, \dots$

Для значения итерационного параметра n задача (1)-(3) записывается в виде

$$C \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \right),$$

$$\theta_n(z, t)|_{t=0} = \theta_0(z),$$

$$\theta_n|_{z=0} = T_1(t),$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_n}{\partial z} \Big|_{z=H} = -N(t, n)(\theta_n - T_b(t))_{z=H}.$$

Тогда используя выражение разности $\Delta\theta(z, t) = \theta_{n+1}(z, t) - \theta_n(z, t)$ получим вспомогательную задачу

$$C \frac{\Delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\Delta\theta}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\Delta\theta|_{t=0} = 0, \quad \Delta\theta|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \Big|_{z=H} + N_n \Delta \theta \Big|_{z=H} = -\Delta N (\theta_{n+1} - T_b(t)) \Big|_{z=H}. \quad (6)$$

Умножим (4) на производную функцию $\psi(z, t)$ и проинтегрируем по z от 0 до H , по t от 0 до t_{\max} . После однократного интегрирования по частям по переменным z и t получим равенство

$$\int_0^H (C \Delta \theta \cdot \psi) \Big|_{t=0}^{t=t_{\max}} dz - \int_0^H \int_0^{t_{\max}} \Delta \theta \cdot C \frac{\partial \psi}{\partial t} dt dz = \int_{t=0}^{t=t_{\max}} \left(\lambda \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \cdot \psi \right)_{z=0}^{z=H} - \int_0^{t_{\max}} \int_0^k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial z} \cdot \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} dz dt$$

Положив, что $\psi(z, t_{\max}) = 0$, $\psi(0, t) = 0$ и учитывая условия (5) и (6), произведем соответствующие преобразования.

Тогда будет иметь место выражение

$$\int_0^{t_{\max}} \int_0^H \Delta \theta \left[C \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dz dt + \int_0^{t_{\max}} \Delta \theta(k, z) \cdot \left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + N_n \psi \right]_{z=H} dt = - \int_0^{t_{\max}} \Delta N \cdot (\theta_{n+1} - T_b(t)) \Big|_{z=H} \psi(H, t) dt.$$

Если примем далее, что

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \\ \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + N_n \psi \right)_{z=H} = 2(\theta(z, t) - T_g(t)) \Big|_{z=H}.$$

Тогда

$$2 \int_0^{t_{\max}} \Delta \theta(H, t) \cdot (\theta(H, t) - T_g(t)) dt = \\ = - \int_0^{t_{\max}} \Delta N \cdot (\theta_n - T_b(t)) \Big|_{z=H} \psi(k, t) dt - \int_0^{t_{\max}} (\Delta N \cdot \Delta \theta \cdot \psi)_{z=H} dt \quad (7)$$

В процессе вычисления получена сопряженная задача

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad \psi \Big|_{t=t_{\max}} = 0, \quad (8)$$

$$\psi \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + N_n(t) \psi \right)_{z=H} = 2(\theta - T_g(t)) \Big|_{z=H}. \quad (9)$$

Литература:

1. Rysbaiuly B. Newton's method to solve the problem of heat transfer in the freezing soil. France, Paris, Pensee Journal, Volume 76, Issue 1, 261-275 pp.
2. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве. // Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.
3. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ, 2008, №1, ст. 62-65.
4. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Известия НАН РК, 2008, № 3, с.45-47.

Рецензент: д.т.н., профессор Маткеримов Т.Ы.