Маматкасымова А.Т., Сатыбаев А.Дж.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ТОКОМ В КАБЕЛЕ

A.T. Mamatkasymova, A.Dzh. Satybaev

INVERSE PROBLEM OF MAXWELL`S EQUATIONS WITH THE CURRENT DISTRIBUTION IN THE CABLE

УДК: 519.633. 517.962.2

Рассмотрена обратная задача для системы уравнений Максвелла с распределенным током в кабеле, и она решена конечно-разностным методом.

Показано, что это построенное решение сходится к точному решению обратной задачи.

***Ключевые слова.** Обратная задача, уравнения Максвелла, конечно-разностный метод, сходимость решения.*

The inverse problem for Maxwell's equations with current distribution in the cable and it solved the finite difference method. Shown that it is constructed solution converges to the exact solution of the inverse problem.

***Key words:** inverse problem, Maxwell's equations, finite- difference method, convergen-ce solving.*

Постановка задачи. Распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнений Максвелла [1]

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} - rot\mathrm{H} + \sigma\mathrm{E} + j = 0 \\ &\mu\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + rot\mathrm{E} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть сторонный ток j имеет вид

$$j = p(t)\theta(t)\cdot(0,0,1)^{*}, \qquad (2)$$

Здесь $p(t)$ – распределение тока в кабеле, $\theta(t) = \begin{cases} 0, \text{ ïðè } & t\le 0 \\ 1, \text{ ïðè } & t\ge 0 \end{cases}$ –ôóíêöèÿ Õåâèñàéäà .

ε, μ, σ – диэлектрическая и магнитная проницаемость, электропрово-димость среды соответственно, E, H – электрическая и магнитная напряженности.

В данной статье за источника выступает кабель, направленный вниз вдоль оси x_3 а кабель имеет достаточно большую длину, измерение проводится достаточно глубоко, поэтому влияние земной поверхности пренебрегается.

Предположим, что до момента времени $t = 0$ ток в кабеле отсутствует, тогда

$$(\mathrm{E}, \mathrm{H})\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad (3)$$

В этом случае компоненты $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{H}_3)$ образует гиперболическую систему с нулевыми начальными условиями и их решение равно нулю, т к. ε, σ, j – не зависит от переменного $\tilde{o}_3$. А компоненты $(\mathrm{E}_3, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ образуют гиперболическую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} + \sigma E_3 + p(t)\theta(t) = 0, \\ &\mu\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial x_2} = 0, \\ &\mu\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial x_1} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$(\mathrm{E}_3,\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)\big|_{t<0}\equiv 0. \qquad (5)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4) по t:

$$\varepsilon(x_1,x_2)\frac{\partial^2\mathrm{E}_3(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathrm{H}_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1\partial t}+\frac{\partial^2\mathrm{H}_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2\partial t}+$$
$$+\sigma(x_1,x_2)\frac{\partial\mathrm{E}_3(x_1,x_2,t)}{\partial t}+p_t'(t)\theta(t)+p(t)\delta(t)=0 \qquad (6)$$

Продифференцируем второе уравнение (4) по x_2:

$$\mu(x_1,x_2)\frac{\partial^2\mathrm{H}_1(x_1,x_2,t)}{\partial t\partial x_2}+\mu'_{x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial\mathrm{H}_1(x_1,x_2,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2\mathrm{E}_3(x_1,x_2,t)}{\partial {x_2}^2}=0. \qquad (7)$$

Продифференцируем третье уравнениепо x_1:

$$\mu(x_1,x_2)\frac{\partial^2\mathrm{H}_2(x_1,x_2,t)}{\partial t\partial x_1}+\mu'_{x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial\mathrm{H}_2(x_1,x_2,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathrm{E}_3(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}=0. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получим выражение

$$\frac{\partial^2 H_2(x_1,x_2,t)}{\partial t\partial x_1}=\frac{1}{\mu(x_1,x_2)}\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}-\frac{\mu'_{x_1}(x_1,x_2)}{\mu^2(x_1,x_2)}\frac{\partial E_3(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}, \qquad (7`)$$

$$\frac{\partial^2 H_1(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}=\frac{-1}{\mu(x_1,x_2)}\cdot\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}+\frac{\mu'_{x_2}(x_1,x_2)}{\mu^2(x_1,x_2)}\frac{\partial E_3(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}, \qquad (8`)$$

Подставляя (7') и (8') в (6) имеем;

$$\varepsilon(x_1,x_2)\frac{\partial^2\mathrm{E}_3}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu(x_1,x_2)}\cdot\left[\frac{\partial^2\mathrm{E}_3}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E}_3}{\partial x_2}\right]-\left[\frac{\mu'_{x_1}}{\mu^2}\frac{\partial\mathrm{E}_3}{\partial x_1}+\frac{\mu'_{x_2}}{\mu^2}\frac{\partial\mathrm{E}_3}{\partial x_2}\right]-$$
$$-\sigma(x_1,x_2)\frac{\partial^2\mathrm{E}_3(x_1,x_2,t)}{\partial t}-p'(t)\theta(t)-p(t)\delta(t)=0$$

Пусть коэффициенты ε,μ,σ не зависят от переменного x_1,x_2, тогда функции E_3 также не зависит от переменных x_1,x_2, и из последнего выражения получим

$$\varepsilon(x_3)\frac{\partial^2\mathrm{E}_3(x_3,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu(x_3)}\cdot\left[\frac{\partial^2\mathrm{E}_3}{\partial {x_3}^2}\right]-\frac{\mu'_{x_3}(x_3)}{\mu^2(x_3)}\frac{\partial\mathrm{E}_3}{\partial x_3}-\sigma(x_3)\frac{\partial^2\mathrm{E}_3}{\partial t}-p'(t)\theta(t)-p(t)\delta(t);$$

$$(x_3,t)\in R_+^2, \qquad (9)$$

Начальные условия для уравнения (9) получим из (5) первого уравнения (4)

$$E_3(x_3,t)\big|_{t<0}\equiv 0 \quad (10)$$

$$E_3(x_3,t)\big|_{x_3=0}=\frac{1}{\varepsilon(0)}\cdot p(t);\quad t\in R_+; \qquad (11)$$

Уравнение (9) является гиперболическим уравнением с криволинейной характеристикой и его приведемк уравнению с прямолинейной характеристикой, для этого введем новую переменную z и новые функции

$$z=z(x_3)=\int_0^{x_3}\frac{\partial\xi}{\sqrt{\varepsilon(\xi)\mu(\xi)}},\quad \bar\varepsilon(z)=\bar\varepsilon(z(x_3))=\varepsilon(x_3),$$

$$\bar\mu(z)=\mu(x_3),\quad \bar\sigma(z)=\sigma(x_3),\quad V(z,t)=V(z,(x_3),t)=\mathrm{E}(x_3,t).$$

Вычислим производные функции

$$\overline{\mu}'_z(z) = \mu'_{x_3}(x_3)\cdot z'_{x_3} = \mu'_{x_3}(x_3)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)}};$$

$$\overline{\mu}_{x_3}(x_3) = \sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\cdot\overline{\mu}'_z(z)$$

$$V''_{tt}(z,t) = \mathrm{E}''_{tt}(x_3,t); \qquad V_t{}'(z,t) = \mathrm{E}'_t(x_3,t);$$

$$V'_z(z,t) = \mathrm{E}''_{x_3}(x_3,t)\cdot z'_{x_3} = \mathrm{E}'_{x_3}(x_3,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(x_3)\mu(x_3)}};$$

$$V''_{zz}(z,t) = \left[\mathrm{E}'_{x_3}(x_3,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(x_3)\mu(x_3)}}\right]'_{x_3} =$$

$$= \mathrm{E}''_{x_3x_3}(x_3,t)\cdot\frac{1}{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)} - \mathrm{E}'_{x_3}\cdot\frac{\left[\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right]'_{x_3}}{2\sqrt{\left[\mu(x_3)\cdot\varepsilon(x_3)\right]^3}} =$$

$$= \mathrm{E}''_{x_3x_3}(x_3,t)\cdot\frac{1}{\varepsilon(x_3)\cdot(x_3)} - \mathrm{E}'_{x_3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)}}\cdot\frac{\left[\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right]'_{x_3}}{2\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)} =$$

$$\left(\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\right)'_z = \left[\left(\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)\right)^{\frac{1}{2}}\right]'_z = \left[\left(\overline{\varepsilon}(z(x_3))\cdot\overline{\mu}(z(x_3))\right)^{\frac{1}{2}}\right]'_{x_3}\\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right]'_{x_3}\cdot z'_{x_3}(x_3)\right]'_{x_3} =\\
&= \frac{\left[\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right]'_{x3}}{2\sqrt{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)}\cdot\sqrt{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)}} = \frac{\left[\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)\right]'_{x_3}}{2(\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3))}
\end{aligned}\right).$$

Из последнего выражения имеем

$$\frac{1}{\varepsilon(x_3)\cdot\mu(x_3)}\cdot\mathrm{E}''_{x_3x_3}(x_3,t) = V''_{zz}(z,t) + \left[\sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\mu(z)}\right]'_z\cdot V'_z(z,t).$$

Учитывая все полученные выкладки из уравнения (9) получим

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} + \left[\sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\right]'_z\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} -$$

$$- \frac{\sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\cdot\overline{\mu}'_z(z)}{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\cdot\left[\sqrt{\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)}\cdot\frac{\partial V(z,t)}{dz}\right] -$$

$$- \frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)}\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} - \frac{p'_t(t)}{\overline{\varepsilon}(z)}\cdot\theta(t) - \frac{p(t)}{\overline{\varepsilon}(z)}\delta(t) =$$

$$= \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} + \left[\left(\overline{\varepsilon}(z)\cdot\overline{\mu}(z)\right)'_z - \frac{\overline{\mu}'_z(z)}{\overline{\mu}(z)}\right]\cdot\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} -$$

$$- \frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)}\cdot\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} - \frac{p'_t(t)}{\overline{\varepsilon}(t)}\theta(t) - \frac{p_t(t)}{\overline{\varepsilon}(t)}\delta(t).$$

Таким образом, из (9)–(11) получили задачу с прямолинейной характеристикой

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2}+\left[\left(\bar{\varepsilon}(z)\cdot\bar{\mu}(z)\right)'_z-\frac{\bar{\mu}'_z(z)}{\bar{\mu}(z)}\right]\cdot\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}-\frac{\bar{\sigma}(z)}{\bar{\varepsilon}(z)}\cdot\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}-$$
$$-\frac{p'_t(t)}{\bar{\varepsilon}(z)}\theta(t)-\frac{p(t)}{\bar{\varepsilon}(z)}\delta(t),\quad (z,t)\in R^2{}_+, \tag{12}$$

$$V(z,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \tag{13}$$

Функцию $p(t)$ на бесконечность мы не можем задавать, поэтому зададим функцию на $[0,2T]$, T-фиксированное положительное число, т. е в (14) $t\in[0,2T]$.

$$V(z,t)\big|_{z=0}=\frac{p(t)}{\bar{\varepsilon}(0)},\quad t\in[0,2T] \tag{14}$$

Пусть относительно коэффициентов функций выполнены условия

$$\left(\bar{\varepsilon}(z),\,\bar{\mu}(z),\bar{\sigma}(z)\right)\in\Lambda_0, \tag{15}$$

где $\Lambda_0=\left\{\bar{\sigma}(z):\bar{\sigma}(z)\in C^2(R_+),\quad \bar{\sigma}'(+0)=0,\quad 0<M_1<\bar{\sigma}(z)\le M_2,\quad \|\bar{\sigma}\|_{C^2(R_+)}\le M_3\right\}$

M_1,M_2,M_3 - положительные постоянные.

Тогда в силу условия (15) и принципа конечной зависимости области решения гиперболического уравнения от области определения коэффициентов (15) и от области данных (14) можно ограничиться рассмотрением задачи (12)- (14) в области

$$\Delta(T)=\left\{(z,t):z\in(0,T),\quad |z|<t<2T-|z|\right\}, \tag{16}$$

Выделим теперь, по методике В.Г. Романова [2], сингулярную и регулярную часть решения прямой задачи (12) – (13) представляя решения в виде

$$V(z,t)=\tilde{V}(z,t)+S(z)\theta(t-|z|), \tag{17}$$

где $\theta(\lambda)$ – функция Хевисайда, $\tilde{V}(x,t)$ – гладкая непрерывная функция. Из (17) получим следующие выкладки:

$$V_t'(z,t)=V_t'(z,t)+S(z)\delta(t-|z|),$$
$$V_{tt}''(z,t)=V_{tt}'(z,t)+S(z)\cdot\delta_t'(t-|z|),$$
$$V_z'(z,t)=\tilde{V}_z-S(z)\delta(t-|z|)+S_z'(z)\cdot\theta(t-|z|),$$
$$V_{zz}''(z,t)=\tilde{V}_{zz}''+S_{zz}''(z)\theta(t-|z|)-2S_z'(z)\cdot\delta(t-|z|)+S(z)\delta_z'(t-|z|),$$

Подставляя последние выкладки в уравнение (12) получим

$$\tilde{V}_{tt}''(z,t)+S(z)\delta_t'(t-|z|)=\tilde{V}_{zz}''(z,t)+S_{zz}''(z)\,\theta\,(t-|z|)-2S_z'(z)\,\delta(t-|z|)+$$
$$+S(z)\,\delta_t'(t-|z|)+\left[\left(\bar{\varepsilon}(z)\cdot\bar{\mu}(z)\right)'_z-\frac{\bar{\mu}_z'(z)}{\bar{\mu}(z)}\right]*$$
$$*\left[\tilde{V}_z'(z,t)-S(z)\,\delta\,(t-|z|)+S_z'(z)\,\theta\,(t-|z|)\right]-$$
$$-\frac{\bar{\sigma}(z)}{\bar{\varepsilon}(z)}\cdot\left[\tilde{V}_t'(z,t)+S(z)\,\delta\,(t-|z|)\right]-$$
$$-\frac{p_t'(t)}{\bar{\varepsilon}(z)}-\frac{p(t)}{\bar{\varepsilon}(z)}\delta(t),\qquad \theta(t)=1,\quad т.к.\quad t\ge 0$$

Собирая коэффициенты относительно $\theta(t-|z|)$ и $\delta(t-|z|)$ при $t=|z|$ и учитывая начальное и граничное условия, приравнивая эти уравнения к нулю получим задачи

$$
\left.\begin{aligned}
&S''_{zz}(z) - \left[\left(\overline{\varepsilon}(z) \cdot \overline{\mu}(z) \right)'_z - \frac{\overline{\mu}_z{}'(z)}{\overline{\mu}(z)} \right] S'_z(z) = 0 \\
&2S'_z(z) + \left[\left(\overline{\varepsilon}(z) \cdot \overline{\mu}(z) \right)'_z - \frac{\overline{\mu}_z{}'(z)}{\overline{\mu}(z)} - \frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} \right] \cdot S(z) - \frac{p(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} = 0 \\
&S(0) = \frac{p(0)}{\overline{\varepsilon}(0)}
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

Отсюда из (18) мы получим интегральное уравнение, в котором имеется неизвестная функция $\overline{\sigma}(z)$, значит $S(z)$ – также неизвестная функция

$$
S(z) = \frac{p(0)}{\overline{\varepsilon}(0)} + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{p(z)}{\overline{\varepsilon}(\xi)} d\xi - \frac{1}{2}\int_0^z \left(\overline{\varepsilon}(\xi) \cdot \overline{\mu}(\xi) \right)'_\xi S(\xi) d\xi +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\overline{\mu}'(\xi)}{\overline{\mu}(\xi)} S(\xi) d\xi - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\overline{\sigma}}{\overline{\varepsilon}(\xi)} S(\xi) d\xi =
$$

$$
= \frac{p(0)}{\overline{\varepsilon}(0)} + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{p(z)}{\overline{\varepsilon}(\xi)} d\xi + \quad (19)
$$

$$
+ \frac{1}{2}\int_0^z \left[\frac{\overline{\mu}'_\xi(\xi)}{\overline{\mu}(\xi)} - \left(\overline{\varepsilon}(\xi) \cdot \overline{\mu}(\xi) \right)'_\xi - \frac{\overline{\sigma}(\xi)}{\overline{\varepsilon}(\xi)} \right] S(\xi) d\xi ,
$$

Из уравнения (18) имеем

$$
\left[\left(\overline{\varepsilon}(z) \cdot \overline{\mu}(z) \right)'_z - \frac{\mu'_z(z)}{\mu(z)} \right] = \frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} - \frac{1}{S(z)} \left[\frac{p(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} - 2 * S'_z(z) \right] \quad (20)
$$

Если будем учитывать (17)- (20) , а также, $\widetilde{V}(z,t)\big|_{t \le |z|} = 0$ то из обратной задачи (12)–(14) получим обратную задачу с прямолинейной характеристикой

$$
V''_{tt}(z,t) = V_{tt}{}''(z,t) + \left[\frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} - \frac{1}{S(z)} \left(\frac{p(t)}{\overline{\varepsilon}(z)} - 2 * S'_z(z) \right) \right] \cdot V_z{}'(z,t) -
$$

$$
- \frac{\overline{\sigma}(z)}{\overline{\varepsilon}(z)} \cdot V_t{}'(z,t) - \frac{p'_t(t)}{\overline{\varepsilon}(z)}, \qquad (z,t) \in \Delta(T), \quad (21)
$$

$$
V(z,t)\big|_{t=|z|} = S(z), \qquad z \in [0, T], \quad (22)
$$

$$
V(z,t)\big|_{z=0} = \frac{p(t)}{\overline{\varepsilon}(0)}, \qquad t \in [0, 2T], \quad (23)
$$

$$
S(z) = \frac{p(0)}{\overline{\varepsilon}(0)} + \frac{1}{2}\int_0^z \frac{p(z)}{\overline{\varepsilon}(\xi)} d\xi + \frac{1}{2}\int_0^z \left[\frac{\overline{\mu}'(\xi)}{\overline{\mu}(\xi)} - \left(\overline{\varepsilon}(\xi) \cdot \overline{\mu}(\xi) \right)'_\xi - \frac{\overline{\sigma}(\xi)}{\overline{\varepsilon}(\xi)} \right] S(\xi) d\xi, \quad z \in (0,T), \quad (24)
$$

Пусть

$$
p(t) \in \Lambda_1, \quad (25)
$$

где $\Lambda_1 = \left\{ p(t) : p(t) \in C^2\left((0,2T)\right), \quad 0 < \left\| p, p'_t \right\|_{C^2} \le M_4 \right\}$

Прямая задача. Определить функцию $V(z,t)$ из (21),(22),(24) при известных коэффициентах $\overline{\sigma}(z), \overline{\varepsilon}(z), p(t), \overline{\mu}(z)$.

Обратная задача. Определить функции $V(z,t)$, $\overline{\sigma}(z)$ из (21)- (24) при известных значениях коэффициентов $\overline{\varepsilon}(z)$, $\overline{\mu}(z)$, а также при известном значении о решении прямой задачи $p(t)$.

Обозначим через $d(z) = 2\dfrac{S'(z)}{S(z)}$, $g(z) = \dfrac{1}{S(z)}$ (*). Тогда

$$S(z) = -\frac{p(0)}{\overline{\varepsilon}(0)} + \int_0^z d(\lambda) S(\lambda) d\lambda, \qquad z \in [0, T], \ (**)$$

$$g'(z) = \left(S^{-1}(z)\right)'_z = -S^{-2}(z) \cdot S'(z) = -\frac{S'(z)}{S^2(z)} = \frac{-S'(z)}{S(z)} \cdot \frac{1}{S(z)} = \frac{-1}{2} d(z) \cdot g(z)$$

Отсюда, проинтегрируя последнее

$$g(z) = -\frac{\overline{\varepsilon}(0)}{p(0)} - \frac{1}{2}\int_0^z d(\lambda) g(\lambda) d\lambda, \qquad z \in (0, T], \qquad (***)$$

Конечно – разностное решение обратной задачи (21)-(24).

Решение обратной задачи (21)-(24) построим, конечно–разностным методом и для этого вводим сеточную область

$$\Delta_h(T) = \left\{ x_i = ih, \quad t_k = kh, \quad h = \frac{T}{N}, \quad i = \overline{0, N}; \ k = \overline{0, 2N}; \quad x_i < t_k < 2T - x_i \right\},$$

h - сеточный шаг по переменным z, t.

Введем обозначения

$$V_i^k = V(ih, kh), \ \sigma_i = \overline{\sigma}(ih) \ \varepsilon_i = \overline{\varepsilon}(ih), \ \mu_i = \overline{\mu}(ih), \ p^k = p(kh),$$

$$S_i = S(ih), \ V_{t\bar{t}} = \frac{V_i^{k+1} - 2V_i^k + V_i^{k-1}}{h^2}, \ V_t = \frac{V_i^{k+1} - V_i^k}{h}, \ p_t = \frac{p^{k+1} - p^k}{h},$$

$$V_{z\bar{z}} = \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{h^2}; \ V_{\bar{z}} = \frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{h}; \ S_{\bar{z}} = \frac{S_i - S_{i-1}}{h},$$

$$(\varepsilon_i \mu_i)_{\bar{z}} = \frac{(\varepsilon_i \mu_i) - (\varepsilon_{i-1}\mu_{i-1})}{h}, \ \mu_{\bar{z}} = \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_{i-1}}{h}.$$

Учитывая обозначения построим конечно–разностный аналог обратной задачи (21)-(24)

$$V_{z\bar{z}} = V_{t\bar{t}} + \left[\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{S_i}\left(\frac{p^k}{\varepsilon_i} - 2S_{\bar{z}}\right)\right] V_{\bar{z}} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} V_t - \frac{p_t}{\varepsilon_i}, \ (x_i, t_k) \in \Delta_h(T), \qquad (26)$$

$$V_i^i = S_i, \ i = \overline{0, N}, \ (27)$$

$$V_0^k = p^k \big/ \varepsilon_0, \ k = \overline{0, 2N}, \qquad (28)$$

$$S_i = \frac{p_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{i-1}\left\{\frac{p_l}{\varepsilon_l} - \left[(\varepsilon_l \mu_l)_{\bar{z}} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right] S_i\right\} \cdot h, \ i = \overline{2, N}; \qquad (29)$$

$$S_{\bar{z}} = \frac{p_i}{2\varepsilon_i} - \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_i \mu_i)_{\bar{z}} - \frac{\mu_{i\bar{z}}}{\mu_i} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right] S_i, \ i = \overline{1, N} \qquad (30)$$

Из разностном уравнении (26) можно получить следующие выражения

$$V_{i+1}^{k}=V_{i}^{k+1}+V_{i}^{k-1}\cancel{-V_{i-1}^{k}}+hr_{i}^{k}\left[V_{i}^{k}-V_{i-1}^{k}\right]-h\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[V_{i}^{k+1}-V_{i}^{k}\right]-\frac{h}{\varepsilon_i}\left[p^{k+1}-p^{k}\right],$$

$$(x_i,t_k)\in\Delta_h(T), \qquad (31)$$

Здесь через r_i пока – обозначили выражение

$$r_i^k=\left[\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}-\frac{1}{S_i}\left(\frac{p^k}{\varepsilon_i}-2S_{\bar{z}}\right)\right],$$

Из (31) имеем

$$V_{i}^{k+1}=V_{i-1}^{k+2}\cancel{+V_{i-1}^{k}}\cancel{-V_{i-2}^{k+1}}+hr_{i-1}^{k+1}\left[V_{i-1}^{k+1}-V_{i-2}^{k+1}\right]-h\frac{\sigma_{i-1}}{\varepsilon_{i-1}}\left[V_{i-1}^{k+2}-V_{i-1}^{k+1}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-1}}\left[p^{k+2}-p^{k+1}\right],$$

$$V_{i-1}^{k+2}=V_{i-2}^{k+3}\cancel{+V_{i-2}^{k+1}}\cancel{-V_{i-3}^{k+2}}+hr_{i-2}^{k+2}\left[V_{i-2}^{k+2}-V_{i-3}^{k+2}\right]-h\frac{\sigma_{i-2}}{\varepsilon_{i-2}}\left[V_{i-2}^{k+3}-V_{i-2}^{k+2}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-2}}\left[p^{k+3}-p^{k+2}\right],$$

$$V_{i-2}^{k+3}=V_{i-3}^{k+4}\cancel{+V_{i-3}^{k+2}}\cancel{+V_{i-4}^{k+3}}+hr_{i-3}^{k+3}\left[V_{i-3}^{k+3}-V_{i-4}^{k+3}\right]-h\frac{\sigma_{i-3}}{\varepsilon_{i-3}}\left[V_{i-3}^{k+4}-V_{i-3}^{k+3}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-3}}\left[p^{k+4}-p^{k+3}\right],\ldots\ldots$$

. . . .

$$V_{i-(i-2)}^{k+1+(i-2)}=V_{2}^{k+i-1}\cancel{=}V_{1}^{k+i}+V_{1}^{k+i-2}+V_{0}^{k+i-1}+hr_{1}^{k+i-1}\cdot\left[V_{1}^{k+i-1}-V_{0}^{k+i-1}\right]-$$

$$-h\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\left[V_{1}^{k+1}\cancel{-V_{1}^{k+i-1}}\right]-\frac{h}{\varepsilon_1}\left[p^{k+i}-p^{k+i-1}\right],$$

т.к. $V_1^{k+i}+V_0^{k+i-1}=(V_0^{k+i+1}-V_0^{k+i-1})/2+V_0^{k+i-1}=\left(V_0^{k+i+1}+V_0^{k+i-1}\right)/2$

$$V_{2}^{k+i-1}=\frac{1}{2}\left(p^{k+i+1}+p^{k+i-1}\right)+hr_{1}^{k+i-1}\cdot\left[V_{1}^{k+i-1}-V_{0}^{k+i-1}\right]-h\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\left[V_{1}^{k+i}-V_{1}^{k+i-1}\right]-\frac{h}{\varepsilon_1}\left[p^{k+i}-p^{k-i-1}\right],$$

Теперь такие выкладки сделаем для V_i^{k-1} :

$$V_{i}^{k-1}=V_{i-1}^{k}+V_{i-1}^{k-2}\cancel{-V_{i-2}^{k-1}}+hr_{i-1}^{k-1}\left[V_{i-1}^{k-1}-V_{i-2}^{k-1}\right]-h\frac{\sigma_{i-1}}{\varepsilon_{i-1}}\left[V_{i-1}^{k}-V_{i-1}^{k-1}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-1}}\left[p^{k}-p^{k-1}\right];$$

$$V_{i-1}^{k}=V_{i-2}^{k+1}\cancel{+V_{i-2}^{k-1}}\cancel{-V_{i-3}^{k}}+hr_{i-2}^{k}\left[V_{i-2}^{k}-V_{i-3}^{k}\right]-h\frac{\sigma_{i-2}}{\varepsilon_{i-2}}\left[V_{i-2}^{k+1}-V_{i-2}^{k}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-2}}\left[p^{k+1}-p^{k}\right];$$

$$V_{i-2}^{k+1}=\cancel{V_{i-3}^{k+2}}+\cancel{V_{i-3}^{k}}-V_{i-4}^{k+1}+hr_{i-3}^{k+1}\left[V_{i-3}^{k+1}-V_{i-4}^{k+1}\right]-h\frac{\sigma_{i-3}}{\varepsilon_{i-3}}\left[V_{i-3}^{k+2}-V_{i-3}^{k+1}\right]-\frac{h}{\varepsilon_{i-3}}\left[p^{k+2}-p^{k+1}\right];\ldots\ldots$$

. . . .

$$V_{2}^{k-i+1}=\frac{1}{2}\left[p^{k-i-1}+p^{k+i-1}\right]+hr_{1}^{k-i+1}\left[V_{1}^{k-i+1}-V_{0}^{k-i+1}\right]-h\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\left[V_{1}^{k-i}-V_{1}^{k-i+1}\right]-\frac{h}{\varepsilon_1}\left[p^{k-i}-p^{k-i+1}\right];$$

Подставляя полученные выкладки в (31) получим окончательно

$$V_{i+1}^{k}=\left(p^{k+i+1}+p^{k-i-1}\right)/2+h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}r_j^{k-i-j+2l}\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l}-V_{j-1}^{k-i-j+2l}}{h}\right]-$$

$$-h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l}-V_j^{k-i-j+2l-1}}{h}\right]-h^2\sum_{l=`1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k-i-j+2l}-p^{k-i-j+2l-1}}{h}\right],$$

$$i=\overline{1,N};\quad k=\overline{i,2N-i}; \tag{32}$$

Последняя формула является разностным аналогом интегральной формулы Даламбера

$$V(z,t)=\left[p(t+z)+p(t-z)\right]/2+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^z\int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\left\{r(\xi,\tau)V'_\xi(\xi,\tau)-\frac{\sigma(\xi)}{\varepsilon(\xi)}V'_\tau(\xi,\tau)-\frac{1}{\varepsilon(\xi)}p'_\tau(\tau)\right\}d\tau d\xi,\quad (z,t)\in\Delta(T), \tag{32'}$$

Подставляя значение r_l^k в (32) и учитывая (*) получим

$$V_{i+1}^k=\left[p^{k+i+1}+p^{k-i-1}\right]/2+h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{k-i-j+2l}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]*$$
$$*\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l}-V_{j-2}^{k-i-j+2l}}{2h}\right]-h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l+1}-V_j^{k-i-j+2l-1}}{2h}\right]-$$
$$-h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k-i-j+2l+1}-p^{k-i-j+2l-1}}{2h}\right],\ i=\overline{1,N};\ k=\overline{i,2N-i}, \tag{33}$$

Из последней формулы получим следующее

$$V_{i-1}^k=\left[p^{k+i-1}+p^{k-i+1}\right]/2+h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{q_j p^{k-i-j+2l+2}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]*$$
$$*\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l+2}-V_{j-2}^{k-i-j+2l+2}}{2h}\right]-h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_l^{k-i-j+2l+2}-V_l^{k-i-j+2l}}{2h}\right]-$$
$$-h^2\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k-i-j+2l+2}-p^{k-i-j+2l}}{2h}\right],\quad i=\overline{1,N};\quad k=\overline{i,2N-i}; \tag{34}$$

Вычитая из (33) последнее (34) и деля на $2h$ получим

$$\frac{V_{i+1}^k-V_{i-1}^k}{2h}=\left[p^{k+i+1}+p^{k-i-1}-p^{k+i-1}-p^{k-i+1}\right]/4h+ \tag{35}$$
$$+\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\frac{g_j p^{k-i+j-1}}{\varepsilon_j}-d_j\right]\cdot\left[\frac{V_j^{k-i+j-1}-V_{j-1}^{k-i+j-1}}{2h}\right]-$$
$$-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-g_j\frac{p^{k+i-j+1}}{\varepsilon_j}-d_j\right]\cdot\left[\frac{V_j^{k-i-j+1}-V_{j-1}^{k-i-j+1}}{h}\right]-$$
$$-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_l^{k-i+j-2}-V^{k-i+j}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_l^{k+i-j+2}-V_l^{k+i-j}}{2h}\right]-$$
$$-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k-i+j-2}-p^{k-i+j}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k+i-j+2}-p^{k+i-j}}{2h}\right],$$

Из (33) приравнивая $k = i+1$ получим

$$V_{i+1}^{i+1} = S_{i+1} = \left[p^{2i+2} + p^{0}\right]/2 + h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} - \left(\frac{g_j^{\,1-j+2l}}{\varepsilon_j} - d_j\right)\right] * \left[\frac{V_j^{\,1-j+2l} - V_{j-2}^{\,1-j+2l}}{2h}\right] -$$

$$-h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_j^{\,2-j+2l} - V_j^{\,-j+2l}}{2h}\right] - h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{2-j+2l} - p^{-j+2l}}{2h}\right], \quad i = \overline{1, N}; \quad k = \overline{i, 2N-i};$$

В формуле (34) приравнивая $k = i-1$ имеем

$$S_{i-1} = \left[p^{2i-2} + p^{2}\right]/2 + h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} - \left(\frac{g_j p^{-j+2l+1}}{\varepsilon_j} - d_j\right)\right] \cdot \left[\frac{V_j^{\,-j+2l+1} - V_{j-2}^{\,-j+2l+1}}{2h}\right] -$$

$$-h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_l^{\,1-j+2l} - V_l^{\,-1-j+2l}}{2h}\right)\right] - h^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{-j+2l+1} - p^{-j+2l-1}}{2h}\right)\right],$$

Из последних выражений имеем

$$\frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h} = \left[p^{2i+2} + p^{0} - p^{2i-2} - p^{2}\right]/4h -$$

$$-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} - \left(\frac{g_j p^{1-j+2i}}{\varepsilon_j} - d_j\right)\right] \cdot \left[\frac{V_j^{\,1-j+2i} - V_{j-2}^{\,1-j+2i}}{2h}\right] -$$

$$-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} - \left(g_j\,\frac{p^{-1-j+2i}}{\varepsilon_j} - d_j\right)\right] \cdot \left[\frac{V_j^{\,-1-j+2i} - V_{j-2}^{\,-1-j+2i}}{2h}\right] -$$

$$-\frac{h^{2}}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{\,1-j+2i} - V_j^{\,-1-j+2i}}{2h}\right) - \frac{h^{2}}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{\,-j+2i} - V_j^{\,-2-j+2i}}{2h}\right) -$$

$$-\frac{h^{2}}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{1-j+2i} - p^{-1-j+2i}}{2h}\right] - \frac{h^{2}}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{-j+2i} - p^{-j+2i-2}}{2h}\right] \qquad (36)$$

Из(***)получим разностный аналог для $g(z)$, т.е.

$$g_{i+1} = -\frac{\varepsilon_0}{p_0} - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i} d_j g_j, \quad i = 0, \overline{N-1}, \qquad (37)$$

Из (*) получим разностный аналог для $d(z)$, подставляем значения g_{i+1} и $\frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h}$ из (37), (36)

$$d_{i+1} = 2g_{i+1} \cdot \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h} = 2\left[-\frac{\varepsilon_0}{p_0} - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i} d_j g_j\right] \cdot \left[\frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h}\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{\varepsilon_0}{p_0} - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i} d_j \cdot g_j\right] \cdot \left[\left(p^{2i+2} + p^{0} - p^{2i-2} - p^{2}\right)/4h\right]$$

$$*\left\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{1-j+2i}-V_{j-2}^{1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{-1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left[\frac{V_j^{-1-j+2i}-V_{j-2}^{-1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{1-j+2i}-V_j^{-1-j+2i}}{2h}\right)\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{-j+2i}-V_j^{-2-j+2i}}{2h}\right)-$$

$$\left.-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{1-j+2i}-p^{-1-j+2i}}{2h}\right)-\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{-j+2i}-p^{-2-j+2i}}{2h}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{\varepsilon_0}{p_0}\cdot\left[p^{2i+2}+p^0-p^{2i-2}-p^2\right]/2h$$

$$-\frac{1}{4h}\left[p^{2i+2}+p^0-p^{2i-2}-p^2\right]\cdot h\sum_{i=1}^{i}d_j g_i-2\left[-\frac{\varepsilon_0}{p^0}-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}d_j g_j\right]*$$

$$*\left\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{1-j+2i}-V_{j-2}^{1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{-1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left[\frac{V_j^{-1-j+2i}-V_{j-2}^{-1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{1-j+2i}-V_j^{-1-j+2i}}{2h}\right)\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{-j+2i}-V_j^{-2-j+2i}}{2h}\right)-$$

$$\left.-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{1-j+2i}-p^{-1-j+2i}}{2h}\right)-\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{-j+2i}-p^{-2-j+2i}}{2h}\right)\right\}$$

Введем следующие обозначения

$$\Phi_{(1)i+1}^{k}=V_{i+1}^{k};\ \Phi_{(2)i+1}^{k}=\frac{V_{i+1}^{k}-V_{i-1}^{k}}{2h};\ \Phi_{(3)i+1}=S_{i+1};$$

$$\Phi_{(4)i+1}=g_{i+1};\ \Phi_{(5)i+1}=d_{i+1};\ F_{(1)i+1}=\left(p^{k+i+1}+p^{k-i-1}\right)/2;$$

$$F_{(2)i+1}=\left[p^{k+i+1}+p^{k-i-1}-p^{k+i-1}-p^{k-i+1}\right]/4h;\ F_{(3)i+1}=\left[p^{2i+2}+p^0\right]/2;$$

$$F_{(4)i+1}=-\frac{\varepsilon_0}{p^0},\ F_{(5)i+1}=-\frac{\varepsilon_0}{p^0}\cdot\left[p^{2i+2}+p^0-p^{2i-2}-p^2\right]/2h;$$

$$\Psi_{(1)l}^{i,k}=h\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{k-i-j+2}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l}-V_{j-2}^{k-i-j+2l}}{2h}\right]-$$

$$-h\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_j^{k-i-j+2l+1}-V_j^{k-i-j+2l-1}}{2h}\right]-h\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{k-i-j+2l+1}-p^{k-i-j+2l-1}}{2h}\right];$$

$$\Psi^{i}_{(3),l}=h\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{1-j+2l}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{1-j+2l}-V_{j-2}^{1-j+2l}}{2h}\right]-$$

$$-h\sum_{j=1}^{l}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left[\frac{V_j^{2-j+2l}-V^{-j+2l}}{2h}\right]-h\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon_j}\left[\frac{p^{2-j+2l}-p^{-j+2l}}{2h}\right];$$

$$\Psi^{i}_{(4),l}=-\frac{h}{2}\cdot d_l g_l;\ \Psi^{i}_{(5),l}=\frac{-1}{4}\left[p^{2i+2}+p^{0}-p^{2i-2}-p^{2}\right]\cdot d_l g_l-\left(-\frac{\varepsilon_0}{p_0}\right)$$

$$*\left\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{1-j+2i}-V_{j-2}^{1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{-1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left[\frac{V_j^{-1-j+2i}-V_{j-2}^{-1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{1-j+2i}-V_j^{-1-j+2i}}{2h}\right)\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{-j+2i}-V_j^{-2-j+2i}}{2h}\right)-$$

$$\left.-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{1-j+2i}-p^{-1-j+2i}}{2h}\right)-\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{-j+2i}-p^{-2-j+2i}}{2h}\right)\right\}-\frac{h}{2}d_i g_j\ *$$

$$*\left\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]\cdot\left[\frac{V_j^{1-j+2i}-V_{j-2}^{1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}-\left(\frac{g_j p^{-1-j+2i}}{\varepsilon_j}-d_j\right)\right]*\right.$$

$$*\left[\frac{V_j^{-1-j+2i}-V_{j-2}^{-1-j+2i}}{2h}\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{1-j+2i}-V_j^{-1-j+2i}}{2h}\right)\right]-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}\left(\frac{V_j^{-j+2i}-V_j^{-2-j+2i}}{2h}\right)-$$

$$\left.-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{1-j+2i}-p^{-1-j+2i}}{2h}\right)-\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{p^{-j+2i}-p^{-2-j+2i}}{2h}\right)\right\} \qquad (38)$$

Таким образом, получим систему нелинейных алгебраических уравнений.

$$\phi_{i+1}^{\kappa}=F_{i+1}^{\kappa}+\Lambda_{i,l}^{k}[\phi], \qquad i=\overline{0,\mathrm{N}-1},\ \kappa=\overline{i+1,\ 2\mathrm{N}-i-1} \qquad (39)$$

Здесь $\Lambda_{i,l}^{k}[\phi]=h\sum_{i=1}^{i}\left[\psi_{(m)\ell}^{i,\kappa}\right]$, $\qquad m=\overline{1,5}.$

Последняя система является разностным аналогом нелинейных интегральных уравнений относительно $V(z,t)$, $V_2'(z,t)$, $S(z)$, $g(z)$, $d(z)$, т.е. нелинейных интегральных формул (32'), (18), (29),), $(*-1)$, ($*-2$).

Лемма. При достаточно малом T система нелинейных алгебраических уравнений (39) разрешима.

Точно такие же выкладки можно получить для $\overline{\phi}_{k+1}^{\kappa}$ с малым членом $\mathrm{O}(h^2)$, т.е. получим

$$\overline{\phi}_{i+1}^{\kappa}=\overline{F}_{i+1}^{\kappa}+\Lambda_{i}^{k}\left[\overline{\Phi}\right]+0(h^2),$$

где вместо $\overline{u}_{i+1}^{\kappa}$, $\overline{u}_{\bar{z},i}^{\kappa}$, S_{i+1}, g_{i+1}, d_{i+1} записываются

$\overline{u}_{i+1}^{\kappa}$, $\overline{u}_{\bar{z},i}^{\kappa}$, $\overline{S}_{i+1}$, $\overline{g}_{i+1}$, $\overline{d}_{i+1}$ с малым членом $O(h^2)$.

Тогда имеем оценку

$$\left|\overline{\Phi}_i^k - \Phi_i^k\right|_C \le \left|\overline{F}_i^k - F_i^k\right|_C + \Lambda\left|\overline{\Psi}_i^k - \Psi_i^k\right|_C,$$

Введем обозначения $\Delta_i = \max\limits_{i=\overline{0,N}}\left|\overline{\Phi}_i^k - \Phi_i^k\right|_C$,

$$\delta_i = \max_{i=\overline{0,N}}\left|\overline{F}_i^k - F_I^k\right|_C, \; k=\overline{i,2N-i}$$

Тогда, используя дискретный аналог Гронуолла–Бельмана к последней формуле, получим

$$\max_{i=\overline{0,N}}\left|\Delta_i\right|_C \le \max_{i=0,N}\left|\delta\right|_C \cdot \exp\left\{\Lambda\left[\Delta_i\right]_C\right\}, \tag{40}$$

Доказана теорема.

Теорема. Пусть $f(t)\in C([0,2T])$ решение обратной задачи (21)-(24)существует, а коэффициенты уравнений удовлетворяют условие (15) и пусть решение прямой задачи $V(z,t)\in C^4\left(\overline{\Delta(T)}\right)$.

Тогда построенное конечно-разностным методом приближенное решение обратной задачи (26)-(29) сходится к точному решению обратной задачи (21)-(24) в класс C со скоростью порядка $O(h)$, при некотором “ малом “ T.

<u>Примечание.</u> Повышенное условие $V(z,t)\in C^4(\overline{\Delta(T)}$ взято для того, чтобы применить к задаче конечно- разностный метод.

Алгоритм решения обратной задачи

Последовательно вычисляем.

1. $V_0{}^k = p^k, \quad k=\overline{0,2N} \qquad p^k -$ известное значение.

2. $V_0{}^k = (f^{k+2}+f^{k-2})\big/2, \quad k=\overline{2,\,2N-2},$ это следует из четности функций $V(z,t)$, $S(z)$ по переменному z.

3. $S_0 = V_0^0 = f^0; \quad S_{-2} = V_2^2\left(f^4+f^0\right)\big/2; \quad g_0 = \dfrac{-\varepsilon_0}{p^0};$

4. $d_0 = 2g_o\cdot S_{\bar z}\Big|_{i=0} = -2\dfrac{\varepsilon_0}{p_0}\cdot\dfrac{S_0-S_{-2}}{2h} = -2\dfrac{\varepsilon_0}{p_0}\left[\dfrac{f^0-(f^4+f^0)/_2}{2h}\right] = -2\dfrac{\varepsilon_0}{p^0}\left[\dfrac{f^0+f^4}{4h}\right];$

5. $V_1{}^k = \left\lfloor f^{k+1}+f^{k-1}\right\rfloor\big/2; \quad S_1 = V_1^1 = \left\lfloor f^2+f^0\right\rfloor\big/2;$

$$g_1 = -\frac{\varepsilon_0}{p^0} - \frac{h}{2}d_o g_0; \qquad d_1 = 2g_1\frac{S_1-S_{-1}}{2h};$$

6. $V_2{}^k = \left(f^{k+2}+f^{k-2}\right)\big/2, \quad k=\overline{2,\,2N-2}; \quad S_2 = \dfrac{p_0}{\varepsilon_0} + \dfrac{1}{2}h\left[\dfrac{p_1}{\varepsilon_1} - (\varepsilon_1\mu_1)_{\bar z} - \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\right]S_1$

$$g_2 = -\frac{\varepsilon_0}{p^0} - \frac{h}{2}d_0\cdot g_0 - \frac{h}{2}d_1 g_1; \qquad d_2 = 2g_2\frac{S_2-S_0}{2h};$$

Допустим, что построен i - слой. Покажем, как определяется следующий слой $i+1$.

7. $V_{i+1}{}^k$ - определяем по формуле (33).

$$S_{i+1} = U_{i+1}^{i+1}, \qquad g_{i+1} = -\frac{\varepsilon_0}{p_0} - \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{i} d_l g_l ;\; d_{i+1} = 2g_{i+1} \cdot \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h},\; i = \overline{2, N-1}$$

Таким образом при $i = \overline{1, N-1}, \quad k = i, 2N - i$ определяем во всех точках.

Литература:

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Науки, 1991.
2. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М. :Научный мир. 2005.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Аблабеков Б.С.