Абдукаримов А.М.

ЧЕКСИЗ ОБЛАСТТАРДА ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЧЕКТЕЛИШИ

Абдукаримов А.М.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

A.M.Abdukarimov

ON BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER ON THE ENDLESS FIELDS

УДК: 517.968

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы об ограниченности решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается об ограниченности решений систем на бесконечной области для двумерных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

In [1-3] addressed the issues of the boundedness of solutions to the infinite domain of integral and integro-differential equations on the half.

In this paper we study the boundedness of solutions of systems on an infinite domain for two-dimensional integro-differential equations of Volterra type.

[1-3] иштерде чексиз областтагы интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин жарым октогу чыгарылыштарынын чектелиши боюнча маселелер каралган.

Бул макалада Вольтер тибиндеги эки өлчөмдүү интегро-дифференциалдык теңдемелер системалары үчүн чексиз областтагы чектүү чыгарылыштар боюнча маселелер каралат.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$u_{tx}(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u_{xs}(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)u_{ty}(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u_{sy}(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G=\{(t,x)/\,0\le t<\infty, 0\le x<\infty\} \qquad (1)$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G), \qquad (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\ +\infty),$$
$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\ +\infty), \qquad (*)$$

где $C(t,x), M(t,x,s), K(t,x,s,y), N(t,x,y)$ – $n\times n$ - мерные самосопряженные заданные матричные функции; $f(t,x)$ – заданная и $u(t,x)$ –неизвестная n-мерные вектор-функции; $(t,x)\in G$.

Под скалярным произведением векторов $\vartheta, w\in R^n$ будем принимать соотношение $<\vartheta,w>=\sum_{i=1}^{n}\vartheta,w;\ \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots\vartheta_n),\ w=(w_1,w_2,\cdots w_n)$. Будем считать, что вектор $\vartheta(t,x)\in L_{2,n}(G)$, если его каждая компонента квадратично суммируема в G, т.е. для любого $i\ (i=1,2,...,n)\ \vartheta_i(t,x)\in L_{2,n}(G)$, где $\vartheta(t,x)=(\vartheta_1(t,x),\vartheta_2(t,x),...,\vartheta_n(t,x))$.

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\left\langle k\vartheta,\vartheta_s\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle k\vartheta,\vartheta\right\rangle_s-\frac{1}{2}\left\langle k_s\vartheta,\vartheta\right\rangle,\text{ где }\left\langle u,\vartheta\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\nu_{\tau z}\right\rangle=\left\langle K\nu\right\rangle_{\tau z}-\left\langle K_\tau\nu\right\rangle_z-\left\langle K_z\nu\right\rangle_\tau+\left\langle K_{\tau z}\nu\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta_{sy}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle K\vartheta,\vartheta\right\rangle_{sy}-\frac{1}{2}\left\langle K_s\vartheta,\vartheta\right\rangle_y-\frac{1}{2}\left\langle K_y\vartheta,\vartheta\right\rangle_s+\frac{1}{2}\left\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\right\rangle-\left\langle K\vartheta_s,\vartheta_y\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $C(t,x),\in C_{n\times n}(G)$, $C_t(t,x)\le 0, C_x(t,x)\le 0, C(t,x)\ge\alpha>0,$ $C_{t,x}(t,x)\ge 0$ при $(t,x)\in G,$

б) матричные функции $M(t,x,s),M_t(t,x,s),M_s(t,x,s),M_{ts}(t,x,s)\in C_{n\times n}(G_1)$,

$<M(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0,$ $<M_t(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0,$ при $(t,x)\in G$ и $<M_s(t,x,s)\vartheta,\vartheta>\ge 0,$

$<M_{ts}(t,x,s)\vartheta,\vartheta>\ \le 0$ при $(t,x,s)\in G_1=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty,0\le x<\infty\}$

в) матричные функции $N(t,x,y),N_x(t,x,y),M_y(t,x,y),$ $N_{xy}(t,x,y)\in C_{n\times n}(G_2)$,

$<N(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0$, $<N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $<N_y(t,x,y)\vartheta,\vartheta>\ge 0,$ $<N_{xy}(t,x,y)>\ \le 0$ при $(t,x,y)\in G_2=\{(t,x,y)/0\le t<\infty,0\le y\le x<\infty\}$

г) матричные функции $K(t,x,s,y),K_y(t,x,s,y),K_s(t,x,s,y),K_t(t,x,s,y),K_x(t,x,s,y),$

$K_{ts}(t,x,s,y),K_{tx}(t,x,s,y),K_{xs}(t,x,s,y),K_{xy}(t,x,s,y),K_{txy}(t,x,s,y),K_{tys}(t,x,s,y),K_{xsy}(t,x,s,y)$ и

$K_{txsy}(t,x,s,y)\in C_{n\times n}(G_3)$, $K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$,

$$<K(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0,\ <K_t(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta>\le 0,$$

$$<K_x(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta>\le 0,\ <K_{tx}(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0\text{ при }(t,x)\in G\quad\text{и}$$

$$<K_{sy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta>\ge 0,\ <K_{tsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta>\le 0,\ <K_{xsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta>\le 0,$$

$$<K_{txsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta>\ge 0\text{ при }(t,x,s,y)\in G_3=\{(t,x,s,y)/0\le s\le t<\infty,0\le y\le x<\infty\}$$

д) для любых

$\vartheta,w\in R^n$ $<-M_t(t,x,0)\vartheta,\vartheta>-2<\left[K(t,x,0,0)+C(t,x)\right]\vartheta,w>-<N_x(t,x,0)w,w>\le 0$ при $(t,x)\in G$, то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $\overline{C}_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем следующую подстановку

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^x\vartheta(s,y)dyds,\quad(t,x)\in G. \tag{2}$$

Тогда задача (1)-(*) сводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$\vartheta(t,x)+C(t,x)\int_0^t\int_0^x\vartheta(s,y)dyds+\int_0^t M(t,x,s)\vartheta(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)\vartheta(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)\vartheta(s,y)dyds=f(t,x). \tag{3}$$

Ясно, что, задача (1)-(*) эквивалентна системе интегральных уравнений (2)-(3). Умножив скалярно обе части системы (3) на вектор функцию $\vartheta(t,x)$ и интегрируя по области $G_{tx}=\{(s,y): 0\le s\le t,\ 0\le y\le x\}$, имеем:

$$\int_0^t\int_0^x\|\vartheta(s,y)\|^2dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<C(s,y)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)>dzd\tau dyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s<M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)>d\tau dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y<N(s,y,z)\vartheta(s,z),\vartheta(s,y)>dzdyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)>dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x<f(s,y),\vartheta(s,y)>dyds. \qquad (4)$$

Заметим, что $\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial y}\int_0^s\int_0^y\vartheta(\tau,z)dzd\tau=\vartheta(s,y)$, второе слагаемое левой части системы (4) перепишем в виде:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<C(s,y)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)>dzd\tau dyds=\frac{1}{2}<C(t,x)\int_0^t\int_0^x\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,\int_0^t\int_0^x\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu>-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t<C_s(s,x)\int_0^s\int_0^x\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,\int_0^s\int_0^x\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu>ds-\frac{1}{2}\int_0^x<C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,$$

$$\int_0^t\int_0^y\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu>+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_0^y\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,\int_0^s\int_0^y\vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu>dyds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x<C(s,y)\int_0^s\vartheta(\zeta,y)d\zeta,\int_0^y\vartheta(s,\nu)d\nu>dyds. \qquad (5)$$

На основании лемму 1 преобразуем третье слагаемое в левой части соотношения (4). Используя формулу интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s<M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)>d\tau dyds=-\int_0^t\int_0^x\int_0^s<M(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)d\xi\right)d\tau,\vartheta(s,y)>dyds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x<M(s,y,0)\left(\int_0^s\vartheta(\xi,y)d\xi\right),\vartheta(s,y)>dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s<M_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)d\xi\right),\vartheta(s,y)>d\tau dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t<M(t,y,0)\left(\int_0^t\vartheta(\xi,y)d\xi\right),\int_0^t\vartheta(\xi,y)d\xi>dy-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<M_s(s,y,0)\int_0^s\vartheta(\xi,y)d\xi,\int_0^s\vartheta(\xi,y)d\xi>$$

$$dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t\vartheta(\xi,y)d\xi,\int_\tau^t\vartheta(\xi,y)d\xi>dyd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s<M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s\vartheta(\xi,y)d\xi>d\tau dyds. \qquad (6)$$

Аналогично получим для четвертого слагаемого:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y<N(s,y,z)\vartheta(s,z),\vartheta(s,y)>dzdyds=\frac{1}{2}\int_0^t<N(s,x,0)\int_0^x\vartheta(s,\nu)d\nu,\int_0^x\vartheta(s,\nu)d\nu>ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<N_y(s,y,0)\int_0^y\vartheta(s,\nu)d\nu,\int_0^y\vartheta(s,\nu)d\nu>dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<N_z(s,x,z)\int_z^x\vartheta(s,\nu)d\nu,\int_z^x\vartheta(s,\nu)d\nu>$$

$$dzds-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y<N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu,\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu> dzdyds\,. \qquad (7)$$

Для преобразования пятого слагаемого соотношения (4) интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)> dzd\tau dyds=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau,\vartheta(s,y)> dyds=\int_0^t\int_0^x<K(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y)> dyds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s<K_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y)> d\tau dyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y<K_z(s,y,0,z)\times$$

$$\times\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y)> dzdyds+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y<K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right),\vartheta(s,y)> dzd\tau dyds\,.$$

Далее, используя лемму 3 и формулу Дирихле, из последнего соотношения получим:

$$\int_0^t\int_0^x<\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)dzd\tau> dyds=\frac{1}{2}<K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi>-\frac{1}{2}\int_0^t<K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$\times d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> ds-\frac{1}{2}\int_0^x<K_y(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{sy}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$d\nu d\xi> dyds-\int_0^t\int_0^x<K(s,y,0,0)(\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi),\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu> dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t<K_\tau(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu,\int_\tau^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu> d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s<K_{\tau s}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> d\tau\, ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s<K_{\tau y}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> dyd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s<K_{\tau sy}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> d\tau dyds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s<K_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi,\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu> d\tau dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x<K_z(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> dz-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x<K_{zs}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi> dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < K_{zy}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{zsy}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyds - \int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_z(s,y,0,z)\times$$

$$\times\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,y)d\nu > dzdyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau\times$$

$$\times dzds - \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dzd\tau dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau sy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds. \qquad (8)$$

Учитывая соотношения (5), (6), (7), (8) условия д) и формулу Дирихле, из (4) имеем:

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{1}{2} < C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > -\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x)\times$$

$$\times\int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > ds - -\frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > dyds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_o^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^x < M(t,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi\times$$

$$\times\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu > ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu,$$

$$\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu > dzds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Bigg[< M_s(s,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < [K(s,y,0,0)+C(s,y)]\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu >\Bigg]dyds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\Bigg\{ < \frac{1}{y}M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < \frac{1}{s}N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu >\Bigg\}dzd\tau dyds + \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < K_y(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <K_{sy}(s,y,0,0)\times$$

$$\times\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\tau z y}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau z s}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dzds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y <K_{z\tau s y}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds. \qquad (9)$$

В силу этих условий левая часть (9) неотрицательна и отсюда с учетом (4) следует оценка

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{\alpha}{2}\|u(t,x)\|^2 \le \left\|\int_0^t\int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds\right\|. \qquad (10)$$

В правой части неравенства (12) применяем неравенство Коши – Буняковского.

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{\alpha}{2}\|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds.$$

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \alpha\|u(t,x)\|^2 \le \int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds, \ \|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds, \quad (t,x)\in G.$$

Из последнего неравенства переходом к пределу при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ получим:

$\|u(t,x)\| \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty \|f(s,y)\|^2 dyds$ при $(t,x)\in G$. Таким образом теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. – 352 с.
2. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Мат. анализ. – Казань: Из-во Казанск. ун-та, 1978. – С. 103–107.
3. Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. О существовании предела при $t \to \infty$ решения нелинейного уравнения Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1971. –Т.7, N 12. –С. 2253–2258.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. – Бишкек, 2001. – Вып. 6. – С. 80–84.
5. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук. – Ош, 2003. – Вып. 7. – С. 35–40.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.