Шаршенбеков М.М.

Z - ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮНҮ БИР ТЕКТҮҮ СУММАЛУУ-АЙЫРМАЛУУ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ТАБУУДА КОЛДОНУУ

Шаршенбеков М.М.

ПРИМЕНЕНИЕ Z - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ОДНОРОДНЫХ СУММАРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

M.M. Sharshenbekov

APPLICATION OF Z-TRANSFORM TO THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM OF A HOMOGENEOUS SUM-DIERENCE EQUATIONS

УДК:519/632.516

Бул иш турактуу коэффициентүү бир тектүү суммалуу-айырмалуу теңдемелердин Коши маселесинин чыгарылышын табууну изилдөөгө арналган.

Данная работа посвящена изучению разрешимости задачи Коши для однородных суммарно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

This work is devoted to the study of the Cauchy problem for the homogeneous sum-difference equations with constant coefficients.

В связи с потребностями импульсной и счетной техники за последнее время значительно возрос интерес к уравнениям в конечных разностях. Но исследованию суммарно-разностных уравнений посвящено мало работ [3].

Для символического метода решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применяются операторные исчисления, построенные на интегральных преобразованиях Лапласа

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\,.$$

Для дискретных функций также построено большое количество различных по форме операторных исчислений. В иностранной литературе, журнальной и монографической, по импульсным системам автоматического регулирования, например, в [7, 8], пользуются так называемым z - преобразованием

$$X(z)=\sum x(n)z^{-n}\,.$$

Например, в литературе [9], широко применяется дискретное преобразование Лапласа (аналог интегрального преобразования Лапласа).

Операторные исчисления можно построить и аксиоматическим путем [2, 4].

Данная работа посвящена изучению разрешимости задачи Коши для однородных суммарно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное суммарно-разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{m}a_iu(n+i)=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{n-1}K_i(n-1-j)u(j+i),\quad n\ge 0 \quad (1)$$

где $u(n)$ – искомая функция; a_i - постоянные коэффициенты; $a_m=1$, $K_i(n)$ имеет вид

$$K_i(n)=\sum_{v=1}^{m_i}Q_{iv}\lambda_{iv}^n\,, \quad (2)$$

Q_{iv}, λ_{iv} – постоянные числа.

Отметим, что уравнение (1) является дискретным аналогом интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра [1], [2].

Для изучения этого вопроса применяется операторное исчисление. Известным методом [3] получается изображение $U(s)$ общего решения в виде отношения двух полиномов

$$U(s)=\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}\,, \quad (*)$$

где полином $\psi(s)$ определенным образом зависит от начальных данных искомой целочисленной функции $u(n)$. Если правая часть (*) правильная дробь, то оригинал для (*) находится по известному правилу.

В работе показано, что в случае $m\ge l$ дробь (*) всегда правильная и оригинал для (*) будет решением данной задачи Коши. Однако, оказалось, что в случае $m<l$ дробь (*) не всегда правильная. Даже если она правильная, соответствующий оригинал не будет решением исходного уравнения. Поэтому особого рассмотрения требует случай $m<l$.

Для суммарно-разностного уравнения (1) задача Коши ставится так: найти целочисленную функцию $u(n)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $n\ge 0$ и начальным условиям

$$u(i)=u_i,\quad i=\overline{0,\,\mu-1};\quad \mu=\max\{m,\,l\}\,. \quad (3)$$

Известно, что для чисто суммарно-разностного уравнения m-го порядка $\left(K_i(n)\equiv 0\right)$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i u(n+i) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

в задаче Коши величины $u(i) = u_i,\ i = \overline{0, m-1}$ можно задавать произвольно. Однако, для суммарно-разностных уравнений это не всегда так. Например, задача Коши

$$\begin{aligned} &u(0) = u_0, \\ &u(1) = u_1, \end{aligned} \tag{5}$$

для уравнения

$$u(n+1) - 3u(n) = 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} u(j+2), \tag{6}$$

не всегда разрешима. Задача (5), (6) разрешима тогда и только тогда, когда между начальными значениями $u(0),\ u(1)$ существует зависимость

$$u(1) - 3u(0) = 0. \tag{7}$$

Учитывая (7), из общего решения

$$u(n) = \frac{c}{7}[9 - 2(-6)^n],$$

Получим решение задачи Коши (5), (6).

Для исследования задачи (1), (3) применяется операторное исчисление, основанное на преобразовании вида [4]

$$D\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{-(n+1)} f(n),$$

где s - комплексный параметр.

Для D - преобразования справедливы формулы

$$D\{f(n+t)\} = s^t D\{f(n)\} - \sum_{i=0}^{t-1} s^{t-i-1} f(i);$$

$$D\left\{\frac{n^{(m)}}{m!}\lambda^{n-m}\right\} = \frac{1}{(s-\lambda)^{m+1}}; \tag{8}$$

где $n^{(m)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1),\ n^{(0)} = 1$ - обобщенная степень порядка m, числа n [6]:

$$D\{f_1(n)\}\cdot D\{f_2(n)\} = D\left\{\sum_{j=0}^{n-1} f_1(n-1-j)\cdot f_2(j)\right\} \tag{9}$$

Применяя к обеим частям (1) оператор D, получим

$$\varphi_1(s)U(s) = \psi_1(s), \tag{10}$$

где

$$\varphi_1(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i - \sum_{i=0}^{l} s^i \overline{K}_i(s)$$

$$\psi_1(s) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=j+1}^{m} a_i s^{i-j-1} u(j) - \sum_{j=0}^{l-1}\sum_{i=j+1}^{l} s^{i-1-j}\overline{K}_i(s) u(j);$$

$$\overline{K}_i(s) \equiv D\{K_i(n)\} = \sum_{v=1}^{m_i} \frac{Q_{iv}}{s-\lambda_{iv}}; \qquad U(s) \equiv D\{u(n)\}. \tag{11}$$

В (10) $\varphi_1(s)$ и $\psi_1(s)$ являются дробно-рациональными функциями от s, что не удобно при исследовании. Избавимся от этого недостатка. Через $h(s)$ обозначим наименьший общий знаменатель дробей

$$\frac{1}{s-\lambda_{iv}}; \quad i = \overline{0, l}, \quad v = \overline{1, m_i}.$$

В частности, если среди λ_{iv} нет совпадающих, то

$$h(s) = \prod(s-\lambda_{iv}); \quad i = \overline{0, l}, \quad v = \overline{1, m_i}. \tag{12}$$

Далее введем обозначения

$$\begin{aligned} &b(s) = h(s)\sum_{i=0}^{m} a_i s^i; \\ &B(s) = h(s)\sum_{i=0}^{l}\overline{K}_i(s)s^i = \sum_{i=0}^{l}\sum_{v=1}^{m_i} Q_{iv} h_{iv}(s) s^i; \\ &b_j(s) = h(s)\sum_{i=j+1}^{m} a_i s^{i-1-j}, \ j = \overline{0,\ m-1}; \\ &B_j(s) = h(s)\sum_{i=j+1}^{l} s^{i-1-j}\overline{K}_i(s), \ j = \overline{0,\ l-1}; \end{aligned} \tag{13}$$

где $h_{iv}(s) = \dfrac{h(s)}{s-\lambda_{iv}}$.

В соответствии с [1], умножая обе части (10) на полином $h(s)$, получим

$$\varphi(s)U(s) = \psi(s), \tag{14}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ будут уже полиномами и определяются по правилу

$$\varphi(s) \equiv h(s)\varphi_1(s) = b(s) - B(s); \tag{15}$$

$$\psi(s) \equiv h(s)\psi_1(s) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j(s)u(j) - \sum_{j=0}^{l-1} B_j(s)u(j) \tag{16}$$

Из (14) находим изображение искомого решения

$$U(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}, \tag{17}$$

как отношение двух полиномов. Если в (17)

$$ст.\ \psi(s) < ст.\ \varphi(s), \tag{18}$$

то возможен непосредственный переход к оригиналу. (Символ $ст.\ \varphi(s)$ обозначает степень полинома $\varphi(s)$).

Пусть в (1) $m \ge l$. Тогда из (13), (15), (16) видно, что

$$ст.\ \psi(s) = M + m; \quad ст.\ \varphi(s) = M + m - 1,$$

где $M \equiv ст.\ h(s) \le \sum_{i=0}^{l} m_i$.

Итак, при $m \ge l$, всегда имеет место неравенство (18), т.е. выражение $\psi(s):\varphi(s)$ является правильным дробно-рациональным и в (17) можем перейти к оригиналу непосредственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Полином $\varphi(s)$ называется характеристическим для однородного суммарно-разностного уравнения (1).

Пусть $s_1, s_2, ..., s_r$ - корни характеристического полинома соответственно с кратностями $k_1, k_2, ..., k_r$ $(k_1 + k_2 + ... + k_r = M + m,\ M + m \equiv N)$. Тогда решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$u(n) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} \frac{n^{(j-1)}}{(j-1)!} s^{n-j+1}, \tag{19}$$

где $A_{ij} = \dfrac{1}{(k_i - j)!} \lim\limits_{s \to s_i} \left[(s - s_i)^{k_i} \dfrac{\psi(s)}{\varphi(s)} \right]^{(k_i - j)}$.

Если корни характеристического уравнения полинома $\varphi(s)$ простые, то (19) принимает более простой вид

$$u(n) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\psi(s_i)}{\varphi'(s_i)} s_i^n .$$

В определение полинома $\psi(s)$ входят величины

$$u(i) = u_i,\ i = \overline{0,\ m-1}, \tag{20}$$

а тем самым они входят и в A_{ij}.

Если величины (20) заданы, то целочисленная функция $u(n)$, определяемое формулой (19) есть решение задачи Коши (1), (20).

Здесь справедлива

ТЕОРЕМА. Если $m \ge l$, то задача Коши (1), (20) разрешима при любых начальных данных u_i.

СЛЕДСТВИЕ.В смысле разрешимости задачи Коши при $m \ge l$ уравнение (1) ведет себя так же, как и чисто конечно-разностное уравнение (4).

ПРИМЕР. Найти решение задачи Коши уравнения

$$u(n+2) + 25u(n) = 2\sum_{m=0}^{n-1} [6^{n-m-1} u(m+1) - 90 \cdot 8^{n-m-1} u(m)] + f(n) \tag{21}$$

с начальными значениями

$$u(0) = u(1) = 0 . \tag{22}$$

Переходя к изображению, имеем

,

$$\left(z^2 + 25 - \frac{2z}{z-6} + \frac{180}{z-8} \right) u(z) = zu(0) + u(1) - \frac{2u(0)}{z-6} + F(z) \tag{23}$$

Умножая обе части (23) на $(z-6)(z-8)$, получаем

$$\varphi(z)u(z) = \psi(z) + (z-6)(z-8)F(z),$$

где $\varphi(z) = z^4 - 14z^3 + 71z^2 - 154z + 120$,

$$\psi(z) = (z^3 - 14z^2 + 46z + 16)u(0) + (z^2 - 14z + 48)u(1)$$

$$u(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} + \frac{(z-6)(z-8)}{\varphi(z)} F(z).$$

Все корни $z_1 = 2,\ z_2 = 3,\ z_3 = 4,\ z_4 = 5$, полинома $\varphi(z)$ - простые.

Тогда оригинал решения для задачи Коши определяется по формуле

$$u(n) = \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{\psi(z_k)}{\varphi'(z_k)} + \frac{(z_k - 6)(z_k - 8)}{\varphi'(z_k)} \sum_{m=0}^{n-1} z_k^{n-m-1} f(m) \right] . \tag{24}$$

Учитывая (22) и (24) находим решение задачи Коши

$$u(n) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(z_k - 6)(z_k - 8)}{\varphi'(z_k)} \sum_{m=0}^{n-1} z_k^{n-m-1} f(m) .$$

Литература

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фрунзе, 1957.– 327 с.
2. Боташев А.И., Усубалиев Э.О разрешимости задачи Коши для неоднородных интегро-дифференциальных уравнений. Сб. “Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии”, вып. 8, Фрунзе, “Илим”, 1971.
3. Быков Я.В., Линенко В.Г. О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений, Фрунзе, “Илим” 1968. – 140 с.
4. Быков Я.В., Боташев А.И. Аксиоматическое построение операционных исчислений. Материалы XIII научной конф. проф.-препод. состава физ.-матем. ф-та КГУ, Фрунзе, 1965.
5. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем,М., Физматгиз, 1963. – 968 с.
6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, “Наука”, М., 1967. – 375 с.
7. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. ФМ, 1963. – 456 с.
8. Ту Юлиус Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. ИИЛ, 1964. – 703 с.
9. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем,М., Физматгиз, 1958. – 724 с.
10. Быков Я.В., Боташев А.И. Математические основы теории переходных процессов в импульсных системах. Уч. пособие для студентов энергетических специальностей, Краснодар, 1976, - 166 с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Искандаров С.