МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Толубаев Ж.О., Байгесеков А.М.

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА АЛЫНГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Толубаев Ж.О., Байгесеков А.М.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ПОЛУЧЕННЫЙ ОТ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Zh.O. Tolubaev, A.M. Baigesekov

THE DIFFERENTIAL OBTAINED FROM THE DERIVATIVE BY INCREASING FUNCTION

УДК:519/633.516

Бул макалада өсүүчү функция боюнча алынган туундунун жардамында функциянын дифференциалы аныкталат, изилденет жана анын түшүнүктөрү кеңейтилет.

Бул макалада функциянын өсүүчү функция боюнча алынган дифференциялынын аныкталышы жана колдонулуштары, аларды аныктоонун негизги жолдору жана аларды колдонуунун негизги усулдары каралат [1].

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции определяется, исследуется и обобщается понятие дифференциала функции.

In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function is defined, we study and generalize the notion of the differential function.

Жогорку жана атайын орто окуу жайлардын математика сабагы боюнча негизги курстарында негизинен бир аргументүү функциянын дифференциялынын аныкталыштарын, алардын касиеттерин, аларды табуунун негизги жолдорун жана алардын колдонуштары жөнүндөгү негизги теоремалар далилдөөлөрү менен толук изилденет. Жогорку тартиптеги дифференциялдарды алуунун жолдору көрсөтүлөт. [2], [3], [4], [5].

Ал эми алардын колдонуштары, теоремалардын формулалары, мисалдарды жана маселелерди чыгарууда толугу менен жыйнактарда каралган [6].

Мейли бизге $f(x)$ функциясы $x = a \in R^n$ чекитинин мында $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ кандайдыр бир аймагында аныкталган болсун.

Ал эми өсүүчү $\varphi_i(x_i)$, $i = 1,2,...,n$ функциялары $x_1 = a_1 \in R$ чекиттинин аймагында аныкталган болсун.

1 - а н ы к т а м а . $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ *айырмасы* $f(x) = f(x_1, x_2 ..., x_n)$ *функциясынын* $x = a$ *чекитиндеги* $\Delta f(x)$ ***өсүндүсү*** *деп аталат.*

2 - а н ы к т а м а . $\Delta x = x - a$ *айырмасы* $f(x) = f(x_1, x_2 ..., x_n)$ *функциясынын x аргументинин* Δx ***өсүндүсү*** *деп аталат.*

3 - а н ы к т а м а . *Жалпы түрү төмөндөгүдөй түрдө аныкталган*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), ..., \varphi(x_n)) \qquad (1)$$

функция $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *аргументинен көз каранды* $\varphi(x)$ ***вектордук-функциясы*** *деп аталат.*

4 - а н ы к т а м а . $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ *айырмасы (1) түрдө аныкталган* $\varphi(x)$ *функциясынын б.а.* $\varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), ..., \varphi(x_n))$ *вектордук-функциясынын* $x = a$ *чекитиндеги* $\Delta\varphi(x)$ ***өсүндүсү*** *деп аталат.*

5 - а н ы к т а м а . *Жалпы түрү төмөндөгүдөй түрдө аныкталган* $\rho(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$ *чоңдук* Δx ***векторунун узундугу*** *деп аталат жана* $|\Delta x|$ *аркылуу белгиленет.*

6 - а н ы к т а м а . *Эгерде* $f(x)$ *функциясынын* $\Delta f(x)$ *өсүндүсүн* $\Delta x \to 0$ *умтулганда* $\Delta f(x) = d_\varphi f(x) + o(|\Delta\varphi(x)|)$ *түрүндө жазууга болсо, анда* $\Delta\varphi(x)$ *тен көз каранды болгон сызыктуу* $d_\varphi f(x)$ *функциясы* $f(x)$ *функциясынын* $\varphi(x)$ *боюнча* $x = a$ *чекитинде алынган* ***дифференциалы*** *деп аталат жана* $d_\varphi f(x)$ *аркылуу белгиленет.*

Эгерде $f(x)$ *функциясынын* $\varphi(x)$ *функциясы боюнча* $x = a$ *чекитинде* $d_\varphi f(x)$ *дифференциалы жашаса, анда* $f(x)$ функциясы

$\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi(x_2),...,\varphi(x_n))$ функциясы боюнча $x=a$ дифференцирленүүчү болот.

1-лемма. *Эгерде $f(x)$ функциясы $x=a$ чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсо, анда ал $x=a$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.*

Далилдөө. Лемманын далилдөөсү $f(x)$ функциясынын $\Delta f(x)$ өсүндүсүнүн качан гана $\Delta x\to 0$ умтулганда нөлгө умтулуусунан келип чыгат $d_\varphi f(x)$ – сызыктуу функция болгондуктан, аны биз төмөндөгүдөй түрдө жазып алсак болот: $d_\varphi f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta\varphi_i(x_i)$ мында A_i – кандайдыр бир чыныгы сандар жана $\Delta\varphi_i(x_i)=\varphi_i(x_i)-\varphi_i(a_i)$.

Эгерде $f(x)=\varphi_i(x_i)$ болсо, анда $d_\varphi f(x)=d\varphi_i=\Delta\varphi_i(x_i)$ болот.

Лемма далилденди.

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ функциясы боюнча $x=a$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда бардык $\psi_i(x_i)=f(a_1,...,x_i,...,a_n)$ координаттык функциялары $\varphi_i=f(x_i)$ функциясы боюнча $x_i=a_i$, $i=1,...,n$, чекиттеринде дифференцирленүүчү болот жана $A_i=\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i)$ орун алат.*

Далилдөө. $f(x)$ функциясынын $\Delta f(x)$ өсүндүсүнүн $x=a$ чекитинде $r\neq i$ учурунда $x_r=a_r$ деп кабыл алсак, анда $\Delta f(x)=A_i\varphi_i(x_i)+$ $+\,o(|\Delta\varphi_i(x_i)|)$ анда $\psi_i(x_i)$ функциясынын аныктамасынан $f(x)-f(a)=\psi_i(x_i)-\psi_i(a_i)=$ $A_s\Delta\psi_i(x_i)+o(|\Delta\psi_i(x_i)|)$ экендиги келип чыгат б.а. $A_i=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\psi_i(x_i)-\psi_i(a_i)}{\varphi_i(x_i)-\varphi_i(a_i)}=\frac{d\psi_i(a_i)}{d\varphi_i(a_i)}$ орун алат.

7-аныктама. *Эгерде $\frac{d\psi_i(a_i)}{d\varphi_i(a_i)}$ туундусу жашаса, анда ал $f(x)$ функциясынан $x=a$ чекитиндеги $i-$чи өзгөрүлмөсү боюнча $\varphi_i(x_i)$ функциясы боюнча алынган* ***жекече туундусу*** *деп аталат жана $\frac{d\psi_i(a_i)}{d\varphi_i(a_i)}=\frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_i(a)}=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial\varphi_i}\right|_{x=a}$ арылуу белгиленет.*

Натыйжа. *$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча $x=a$ чекитинде алынган дифференциалы $d_\varphi f(x)\big|_{x=a}=\frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+...+\frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_i}\Delta\varphi_n$* түрүндө жазылат.

Жыйынтыктап айтканда, $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча чекитте дифференцирленүүсүнүн зарыл шарты болуп бул чекитте функциянын бардык жекече туундуларынын жашашы эсептелет.

2-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясынын $x=a$ чекитинин кандайдыр бир аймагында $\varphi(x)$ функциясы боюнча бардык жекече туундулары жашаса жана алар үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x)$ функциясы $x=a$ чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болот.*

Далилдөө. Эсептөөгө жеңил болуусу үчүн $n=2$ деп алалы. $f(x,y)$ функциясынын (a,b) чекитиндеги $\Delta f(x,y)$ өсүндүсүн төмөндөгүдөй түрдө жазып алабыз:

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)&=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=\\&=(f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y))-\\&\quad-f(a,b+\Delta y)-f(a,b))\end{aligned}$$

Мында ар бир кашанын ичиндеги айырмаларга кеңейтилген чектелген Лагранжанын өсүндүлөрү жөнүндөгү формуласын колдонсок, анда ар бир үзгүлтүксүз өсүүчү $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(y)$ функциялары үчүн төмөнкү формуланы алабыз:

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a+\xi\Delta\varphi_1,b+\Delta y)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a_1,b+\eta\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2$$

Мында $\Delta\varphi_1=\varphi_1(a+\Delta x)-\varphi_1(a)$,

$\Delta\varphi_2=\varphi_2(b+\Delta y)-\varphi_2(b)$, $\xi,\eta-$ турактуу сандар жана $0\prec\xi$, $\eta\prec 1$.

Мындан жекече туундулардын $\Delta x\to 0$ жана $\Delta y\to 0$ умтулганда үзгүлтүксүздүгүнөн төмөнкү катыштарды алабыз

$$\frac{\partial f(a+\xi\Delta\varphi_1,\quad b+\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}+0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(a,\quad b+\eta\Delta y)}{\partial\varphi_2}=\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial\varphi_2}+0 \qquad (1)$$

ошондуктан,

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a,b)}{\Delta\varphi_2}\Delta\varphi_2+0(|\Delta\varphi_1|+|\Delta\varphi_2|).$$

келип чыгат.

$$|\Delta\varphi_1| \le |\Delta\varphi|, \quad |\Delta\varphi_2| \le |\Delta\varphi|,$$

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2),$$ болгондуктан

$$|\Delta\varphi| = \sqrt{|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_2|^2},$$

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial \varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{\partial f(a,b)}{\partial \varphi_2}\Delta\varphi_2 + 0(|\Delta\varphi|) =$$
$$= d_\varphi f(x,y) + 0(|\Delta\varphi|)$$

экендиги келип чыгат, б.а. $f(x,y)$ функциясынын $(x,y)=(a,b)$ чекитинде дифференцирленүүчүлүгү келип чыгат.

Теорема далилденди.

3 - т е о р е м а. *Мейли бизге $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$ кандайдыр бир $x = a = (a_1, \ldots, a_n)$ чекитинин аймагында аныкталган R^n ди R^n ге чагылдырган чагылдыруу болсун жана $x = a = (a_1, \ldots, a_n)$ чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун жана каалагандай эң кичине $\varepsilon \succ 0 -$ саны үчүн $u(x)$ чагылдыруусунда кандайдыр бир $0(a,b)$ чекитинин δ-аймагынын образы $b = u(a)$ чекитинин ε-аймагында кармалса, $y \in 0(b,\varepsilon)$ чекити үчүн $f(y)$ сандык функциясы аныкталса жана ал b чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда $h(x) = f(u(x))$ татаал функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болот жана төмөнкү барабардык*

$$\frac{\partial h(x)}{\partial \varphi_s} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_s} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial \varphi_s}, \quad s = 1,\ldots,n.$$

орун алат, бул барабардыкта $\varphi_s(x)$ боюнча алынган жекече туундулар $x = a$ чекитинде, ал эми y_i, $i = 1,\ldots,m -$ боюнча алынган жекече туундулар $y = b$ чекитинде каралат.

Д а л и л д ө ө . $f(y)$ сызыктуу функциясынын $y = b$ чекитинде дифференцирленүүчүлүгүнөн $\Delta f(x)$ функциясынын аргументтин каалагандай $\Delta y = y - b$ өсүндүсүнө тура келген өсүндүсүн: $\Delta f(y) = df(y) + o(|\Delta y|)$ түрүндө жазып алсак болот,

мында $\Delta f(y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f(y)}{\partial y}\Delta y_i.$

Бирок $\Delta y = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$,

$$\Delta y_i = u_i(x) - u_i(a) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial u_i(a)}{\partial \varphi_s}\Delta\varphi_s + o(|\Delta\varphi|)$$

болгондуктан, акыркы эки барабардыктан

$$\Delta h(x) = \Delta f = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_s}\right)\Delta\varphi_s + o(|\Delta\varphi|)$$

келип чыгат, б.а. татаал функция дифференцирленүүчү болот. *Теорема далилденди.*

Н а т ы й ж а. Дифференцирлөөнүн эрежелери.

Жогорудагы далилденгендерден төмөндөгү формулалардын тууралыгы келип чыгат:

1. $d_\varphi(Cu) = C d_\varphi u, \forall C \in R;$
2. $d_\varphi(u \pm v) = d_\varphi \pm d_\varphi v;$
3. $d_\varphi(uv) = u d_\varphi v + v d_\varphi u;$
4. $d_\varphi\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v d_\varphi u - u d_\varphi v}{v^2}; \; v(a) \ne 0$

Д а л и л д ө ө . 3 - эреженин далилдөөсүн карап көрөлү:

Мейли бизге $z = z(u,v) = uv$, болсун, анда $d_\varphi z = \frac{d\,z}{\partial u} d_\varphi u + \frac{\partial z}{\partial v} d_\varphi v = v d_\varphi u + u d_\varphi v.$ экендиги келип чыгат.

Калган эрежелер ушундай эле жол менен далилденет.

Эми биз жогорку тартиптеги дифференциалдарды карап көрөлү.

Мейли бизге $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ функциясы боюнча эки жолу $x = a = (a_1, \ldots, a_n)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсун.

Дважды дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x = a = (a_1, \ldots, a_n)$.

$d\varphi = (d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n) = h = (h_1, \ldots, h_n)$ өсүндүсүн түрүндө аныктап алалы.

Анда аныкталган өсүндүгө карата жаңы төмөндөгү түрдө аныкталуучу

$$g(x) = df_\varphi(x) = \sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_s} \quad g(x) = g(x,h)$$

функциясын алабыз.

Аныкталган $g(x) = g(x,h)$ функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болот жана анын дифференциалы $d_\varphi g(a) = \sum\limits_{r=1}^{n} h_s \frac{\partial g(a)}{\partial \varphi_r}\cdot\Delta\varphi_r$ (1) түрүндө аныкталат, б.а.

$$d_\varphi g(a) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} h_s \cdot \Delta\varphi_r \left(\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_s}\right)\Bigg|_{x=a} \quad (2)$$

түрүндө болот.

Эми биз $h_s = \Delta\varphi_s = d\varphi_s$ деп белгилеп алсак, анда $d^2{}_{\varphi} f(a) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\varphi_s \partial\varphi_r} \cdot d\varphi_s d\varphi_r \quad (3)$ түрдө аныкталган туюнтмасын алабыз.

8 - а н ы к т а м а. *Жалпы түрү* $d^2{}_{\varphi} f(a) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\varphi_s \partial\varphi_r} \cdot d\varphi_s d\varphi_r \quad (3)$ *түрүндө аныкталган дифференциал* $f(x)$ *функциясынын* $\varphi(x)$ *функциясы боюнча эки жолу* $x = a = (a_1,...,a_n)$ *чекитинде алынган* ***экинчи дифференциалы*** *деп аталат.*

9 - а н ы к т а м а. *Жалпы түрү* $d^k{}_{\varphi} f(x) = \sum_{r=1}^{n}...\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^k f(x)}{\partial\varphi_s ...\partial\varphi_r} \cdot d\varphi_s ... d\varphi_r \quad (4)$ *түрүндө аныкталган дифференциал* $f(x)$ *функциясынын* $\varphi(x)$ *функциясы боюнча* k *- жолу алынган* ***дифференциалы*** *деп аталат.*

Көпчүлүк учурда жазууга жеңил болуусу үчүн (4) туюнтманы төмөндөгүдөй түрдө жазып алабыз:

$$d^k{}_{\varphi} f(x) = \left(\sum_{s=1}^{n} d\varphi_s \frac{\partial}{\partial\varphi_s}\right)^k f(x)$$

Акыркы туюнтмадан кеңейтилген түрдө аныкталган туюнтманы алуу үчүн кашааны көп мүчө түрүндө көрсөтүлгөн даражага көтөрүп, $d\varphi$, $\frac{\partial}{\partial\varphi_s}$ символдорун көз каранды эмес өзгөрүлмө түрүндө карап жана бөлчөктүн алымындагы $\frac{\partial^k}{\partial\varphi_s ...\partial\varphi_r}$ туюнтмасына $f(x)$ ти жазып коюу керек.

Адабияттар:

1. А.Асанов “Производная функция по возрастающей функции” Табигый илимдер журналы КТУ Манас 1998.
2. Илин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. “Математический анализ” Т. I,II,III М: Издательства МГУ 1985.
3. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
4. А.Борубаев, К.Бараталиев, Т.Камытов “ Математикалык анализ”. 1-2-бөлүм. Б.Шабыкеев, Т.Аманкулов, Бишкек - 2009.
5. Усубакунов Р. ”Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр” Фрунзе - 1969.
6. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С. “Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы” Бишкек-2005.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.