МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Абдукаримов А.М.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЧЕКСИЗ ОБЛАСТТАРДА ЧЕКТЕЛҮҮСҮ

Абдукаримов А.М.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Abdukarimov A.M.

BOUNDED SOLUTIONS OF SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER PARTIAL DERIVATIVES ON AN INFINITE DOMAIN

УДК:517.968

[1-3] иштерде интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын чексиз област-тын жарым огундагы чектелүүсү каралган.

Бул макалада экинчи тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын чексиз областтарда чектелүүсү изилденет.

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы об ограниченности решений на бесконечной области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

В этой статье изучается ограниченность решений систем интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на бесконечных областях.

In [1-3] considered the question of limiting solutions for an infinite domain of integral and integro-differential equations on the half.

In this paper, we study the limitations of solutions of systems of integro-differential equations of second order partial derivatives on infinite domains.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$u_{tx}(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u_{sx}(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)u_{ty}(t,y)dy+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u_{sy}(s,y)dyds=f(t,x),$$

$$(t,x)\in G\ (t,x)\in G=\{(t,x)/\,0\le t<\infty, 0\le x<\infty\}, \qquad (1)$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G), \qquad (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0, \qquad x\in[0,\ \ +\infty),$$
$$u(t,0)=0, \qquad t\in[0,\ \ +\infty), \qquad (*)$$

где $M(t,x,s), K(t,x,s,y), N(t,x,y)$ – $n\times n$ - мерные, самосопряженные заданные матричные функции; $f(t,x)$ – заданная и $u(t,x)$ –неизвестная n -мерные вектор-функции; $(t,x)\in G$.

В данной статье изучается об ограниченности решений систем двумерных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в неограниченных областях.

Под скалярным произведением векторов $\vartheta, w\in R^n$ будем принимать соотношение $<\vartheta,w>=\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i w_i;\quad \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots\vartheta_n),\ w=(w_1,w_2,\cdots w_n)$. Будем считать, что вектор $\vartheta(t,x)\in L_{2,n}(G)$, если его каждая компонента квадратично суммируема в G, т.е. для любого $i(i=1,2,...,n)$ $\vartheta_i(t,x)\in L_{2,n}(G)$, где $\vartheta(t,x)=(\vartheta_1(t,x),\vartheta_2(t,x),...,\vartheta_n(t,x))$.

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\langle k\vartheta,\vartheta_s\rangle=\frac{1}{2}\langle k\vartheta,\vartheta\rangle_s-\frac{1}{2}\langle k_s\vartheta,\vartheta\rangle, \text{ где } \langle u,\vartheta\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\langle K\nu_{\tau z}\rangle=\langle K\nu\rangle_{\tau z}-\langle K_\tau\nu\rangle_z-\langle K_z\nu\rangle_\tau+\langle K_{\tau z}\nu\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\langle K\vartheta,\vartheta_{sy}\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_{sy}-\frac{1}{2}\langle K_s\vartheta,\vartheta\rangle_y-\frac{1}{2}\langle K_y\vartheta,\vartheta\rangle_s+\frac{1}{2}\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\rangle-\langle K\vartheta_s,\vartheta_y\rangle,$$

гдеK– самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $M(t,x,s), M_t(t,x,s), M_s(t,x,s), M_{ts}(t,x,s)\in C_{n\times n}(G_1)$,

$M(t,x,0)\ge 0,\quad M_t(t,x,0)\le 0,$ при $(t,x)\in G$ и $M_s(t,x,s)\ge 0,\ M_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$; $G_1=\{(t,x,s):\ 0\le s\le t<\infty;\quad 0\le x<\infty\}$

б) матричные функции $N(t,x,y), N_x(t,x,y), M_y(t,x,y),\ N_{xy}(t,x,y)\in C_{n\times n}(G_2)$,

$N(t,x,0)\ge 0$, $N_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $N_y(t,x,y)\ge 0,\ N_{xy}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$; $G_2=\{(t,x,y):\ 0\le t<\infty;\quad 0\le y\le x<\infty\}$

в) матричные функции $K(t,x,s,y), K_y(t,x,s,y), K_s(t,x,s,y), K_t(t,x,s,y), K_x(t,x,s,y)$,

$K_{ts}(t,x,s,y), K_{tx}(t,x,s,y), K_{xs}(t,x,s,y), K_{xy}(t,x,s,y), K_{txy}(t,x,s,y), K_{tys}(t,x,s,y), K_{xsy}(t,x,s,y)$ и $K_{txsy}(t,x,s,y)\in C_{n\times n}(G_3)$, $G_3=\{(t,x,s,y):\ 0\le s\le t<\infty;\ 0\le y\le x<\infty\}$ $K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $K(t,x,0,0)\ge\alpha>0,\quad K_t(t,x,0,0)\le 0$, $K_x(t,x,0,0)\le 0,\quad K_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ и $K_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $K_{tsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K_{xsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$,

д) для любых $u,\vartheta\in R^n$ $<-M_t(t,x,0)u,u>-2<K(t,x,0,0)u,\vartheta>-<N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0$ при $(t,x)\in G$,

то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G)\cap C_n(G)$.

- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем следующую подстановку $u(t,x)=\int_0^t\int_0^x\vartheta(s,y)dyds,\quad (t,x)\in G$.

Тогда задача (1)-(*)сводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода

$$\vartheta(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)\vartheta(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)\vartheta(t,y)dy+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)\vartheta(s,y)dyds=f(t,x), \quad (2)$$

Ясно, что, задача (1)-(*) эквивалентна системе интегральных уравнений -(2). Умножив скалярно обе части системы (2) на вектор функцию $\vartheta(t,x)$ и интегрируя по области $G_{tx}=\{(s,y):0\le s\le t,\ 0\le y\le x\}$, имеем

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y) > d\tau dyds +$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)\vartheta(s,z),\vartheta(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x < f(s,y),\vartheta(s,y) > dyds . \qquad (3)$$

Первое слагаемое левой части системы (3) преобразуется к следующему виду:

На основании лемму 1преобразуемвторое слагаемое в левой части соотношения (3). Используя формулу интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y) > d\tau dyds = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right)d\tau,\vartheta(s,y) > dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < M(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right),\vartheta(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right),\vartheta(s,y) > d\tau dyds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t < M(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi\right),\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_s(s,y,0)\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi,\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi >$$

$$dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi,\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi > d\tau dyds . \qquad (4)$$

Аналогично получим для третьего слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)\vartheta_1(s,z),\vartheta(s,y) > dzdyds = \frac{1}{2}\int_0^t <N(s,x,0)\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu,\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu,\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu,\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu >$$

$$dzds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu,\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dzdyds . \qquad (5)$$

Для преобразования четвертого слагаемого соотношения (3)

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau,\vartheta(s,y) > dyds = \int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y) > dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y) > d\tau dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_z(s,y,0,z)\times$$

$$\times\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\vartheta(s,y) > dzdyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right),\vartheta(s,y) > dzd\tau dyds .$$

Далее, используя лемму 3 и формулу Дирихле, из последнего соотношения получим

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)dzd\tau > dyds = \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$\times d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds - \frac{1}{2}\int_0^x < K_y(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{sy}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$d\nu d\xi > dyds - \int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)(\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi),\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < K_\tau(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu,\int_\tau^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu > d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\tau s}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\tau y}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyd\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau sy}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dyds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi,\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > d\tau dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x < K_z(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dz -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{zs}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < K_{zy}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{zsy}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyds - \int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_z(s,y,0,z)\times\times\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi,$$

$$\int_z^y \vartheta(s,y)d\nu > dzdyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau\times$$

$$\times dzds - \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dzd\tau dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau z y}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds. \qquad (6)$$

Учитывая соотношения (4), (5), (6) условия в) и формулу Дирихле, из (3) имеем

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{1}{2}\int_0^x < M(t,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi \int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dy +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu > ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu > dzds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Big[< M_s(s,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < K(s,y,0,0)\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu >\Big]dyds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\Big\{ < \frac{1}{y}M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < \frac{1}{s}N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu >\Big\}dzd\tau dyds + \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < K_y(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{sy}(s,y,0,0)\times$$

$$\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\tau z y}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau z s}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dzds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{z\tau s y}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds \qquad (7)$$

В силу этих условий левая часть (7) неотрицательна и отсюда с учетом (3) следует оценка

$$\int_0^t\int_0^x \left\|\vartheta(s,y)\right\|^2 dyds + \frac{\alpha}{2}\left\|u(t,x)\right\|^2 \le \left\|\int_0^t\int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds\right\|. \qquad (8)$$

В правой части неравенства (8) применяем неравенствоКоши – Буняковского.

$$\int_0^t\int_0^x \left\|\vartheta(s,y)\right\|^2 dyds + \frac{\alpha}{2}\left\|u(t,x)\right\|^2 \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\|\vartheta(s,y)\right\|^2 dyds .$$

$$\int_0^t\int_0^x \left\|\vartheta(s,y)\right\|^2 dyds + \alpha\left\|u(t,x)\right\|^2 \le \int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds$$

$$\left\|u(t,x)\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^x \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds, \quad (t,x) \in G$$

Из последнего неравенства переходом к пределу при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ получим

$$\left\|u(t,x)\right\| \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty \left\|f(s,y)\right\|^2 dyds \quad \text{при } (t,x) \in G .$$

Таким образом теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных систем. – Фрунзе: Илим, 1974 352 с.
2. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Мат. Анализ. – Казань: Из-во Казанск. ун-та, 1978. С. 103-107.
3. Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. О существовании предела при $t \to \infty$ решения нелинейного уравнения Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1971. –Т.7, N 12. –С. 2253-2258.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. – Бишкек, 2001. – Вып. 6. – С. 80–84.
5. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. ОшГУ. Сер.физ.-мат. наук. – Ош. 2003. – Вып. 7. – С. 35–40.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.