МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА
MATHEMATIC

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН АЙКЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б.

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

B.S. Ablabekov, A.B. Baiserkeeva

EXPLICIT SOLUTION CAUCHY PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

УДК: 517.95

Бул иште эки өлчөмдүү псевдопараболалык тендеме үчүн Коши маселеси каралды. Коюлган маселе учун чыгарылыщынын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теорема далилденди жана айкын чыгарылышы алынды.
***Негизги сөздөр**: псевопараболалык тендеме, Коши маселеси, айкын чыгарылыш.*

В этой работе рассматривается задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения. Доказана существование и единственность решения поставленной задачи и получено явное решение.
***Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, задача Коши, явное решение.*

In this paper we consider the Cauchy problem for a two-dimensional pseudo parabolic equation. We proved existence and uniqueness of solutions of the problem and obtain an explicit decision.
***Key words:** pseudo-parabolic equations, Cauchy problem, explicit solution.*

Введение. Постановка задачи. Систематическое изучение неклассических уравнений в частных производных, т.е. не являющихся уравнениями типа Коши–Ковалевской, началось в середине XX в.

В [1,3] была рассмотрена начально-краевая задача для двумерного псевдопараболического уравнения, а в [2] построено фундаментальное решение для двумерного оператора фильтрации жидкостей в трещиновато-пористой среде и получены явные решения соответствующих задач. В данной работе при более слабых предположениях получено явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения.

Задача. Найти функцию $u(x,y,t)\in C([0,T];C(R^2)\bigcap L_p(R^2)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$Lu \equiv u_t - \lfloor u_{xxt} + u_{yyt} \rfloor - \alpha\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = f(x,y,t), \quad (x,t)\in Q_T, \qquad (1)$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x,y), \quad x\in R^2, \qquad (2)$$

где $Q_T = \{(x,y,t)\big|\ (x,y)\in R^2, t\in(0,T]\}$.

2. Основной результат. Существование и единственность решения задачи Коши.

ТЕОРЕМА 1. Если $u_0(x,y) \in C(R^2) \bigcap L_p(R^2)$, $f(x,y,t) \in C([0,T]; C(R^2) \bigcap L_p(R^2)$, то существует единственное классическое решение задачи (1), (2), $u(x,y,t) \in C([0,T]; C(R^2) \bigcap L_p(R^2)$. Это решение имеет вид

$$u(x,y,t) = \int_0^t \int_{R^2} G_1(x-z, y-s, t-\tau) f(z,s,\tau) dz ds d\tau + \\ + \int_{R^2} G(x-z, y-s, t) u_0(z,s) dz ds, \tag{3}$$

где $G(x,y,t) = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{R^2} e^{i(x\xi + y\eta)} \exp\left(-\frac{\alpha(\xi^2+\eta^2)}{1+\xi^2+\eta^2} t \right) d\xi d\eta$, (4)

$$G_1(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \frac{e^{i(x\xi + y\eta)}}{1+\xi^2+\eta^2} \exp\left(-\frac{\alpha(\xi^2+\eta^2)}{1+\xi^2+\eta^2} t \right) d\xi d\eta. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку задача (1),(2) рассматривается на плоскости R^2, то применяя к (1) преобразования Фурье по переменным

x, y получим

$$\left(\left(\xi^2+\eta^2\right) \frac{d}{dt} + \alpha\left(\xi^2+\eta^2\right) + \frac{d}{dt} \right) \tilde{u}(\xi,t) = \tilde{f}(\xi,t), \tag{6}$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta,0) = \tilde{u}_0(\xi,\eta), \tag{7}$$

где

$$\tilde{u}(\xi,\eta,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} u(x,y,t) dx dy,$$

$$\tilde{f}(\xi,\eta,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} f(x,y,t) dx dy, \quad \tilde{u}_0(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} u_0(x,y) dx dy$$

-преобразование Фурье функций $u(x,y,t)$, $f(x,y,t)$, $u_0(x,y)$ соответственно.

Общее решение линейного однородного уравнения соответствующему (6), имеет вид:

$$\tilde{u}(\xi,\eta,t) = C(\xi,\eta) \exp\left(-\frac{\alpha(\xi^2+\eta^2)}{1+\xi^2+\eta^2} t \right).$$

Далее, используя метод вариации произвольной постоянной, решение неоднородного уравнения (6) ищем в виде

$$\tilde{u}(\xi,\eta,t)=C(\xi,\eta,t)\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right),\ \left(\xi,\eta\right)\in R^2. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (6) для $C(\xi,\eta,t)$), получаем

$$C_t(\xi,\eta,t)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\exp\left(\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right)\tilde{f}(\xi,\eta,t).$$

Отсюда

$$C(\xi,\eta,t)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\int_0^t\exp\left(\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}\tau\right)\tilde{f}(\xi,\eta,\tau)d\tau+C_1(\xi,\eta).$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (6) имеет вид:

$$\tilde{u}(\xi,\eta,t)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}(t-\tau)\right)\tilde{f}(\xi,\eta,\tau)d\tau+C_1(\xi,\eta)\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right).$$

Используя начальное условие (5), находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\xi,\eta,t)=&\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}(t-\tau)\right)\tilde{f}(\xi,\eta,\tau)d\tau+\\&+\tilde{u}_0(\xi,\eta)\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right).\end{aligned} \qquad (7)$$

Теперь применяя к (7) обратное преобразование Фурье, получим

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{i(x\xi+y\eta)}\tilde{u}(\xi,\eta,t)d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{i(x\xi+y\eta)}\left[\tilde{u}_0(\xi,\eta)\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right)\right]d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{i(x\xi+y\eta)}\left[\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}(t-\tau)\right)\tilde{f}(\xi,\eta,\tau)d\tau\right]d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{i(x\xi+y\eta)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{-i(z\xi+s\eta)}u_0(z,s)dzds\right]\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{R^2} e^{i(x\xi+y\eta)}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}(t-\tau)\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{e^{-i(z\xi+s\eta)}}{1+\xi^2+\eta^2}f(z,s,\tau)dzds\right]d\xi d\eta = \quad =$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2} u_0(z,s)\left[\int_{R^2} e^{i(x-z)\xi}e^{i(y-s)\eta)}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right)d\xi d\eta\right]dzds+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^t\int_{R^2} f(z,s,\tau)\left[\int_{R^2}\frac{e^{i(x-z)\xi}e^{i(y-s)\eta}}{1+\xi^2+\eta^2}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}(t-\tau)\right)d\xi d\eta\right]dzdsd\tau.$$

Отсюда приходим, к формуле (3).

Учитывая обозначение (4), (5) и пользуясь разложением в ряд Тейлора

$$\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t\right)=e^{-\alpha t}\exp\left(-\frac{\alpha t}{1+\xi^2+\eta^2}\right)=e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k},$$

перепишем функции $G(x,y,t)$ и $G_1(x,y,t)$ в виде

$$G(x,y,t)=\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi^2}\int_{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k}e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\int_{R^2}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k}e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta=e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}B_k(x,y),$$

$$G_1(x,y,t)=\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi^2}\int_{R^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k-1}e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\int_{R^2}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k-1}e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta=e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}B_{k+1}(x,y),$$

где

$$B_k(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{R^n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-k}e^{i[(x-z)\xi+(y-s)\eta]}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{2^{1-k}}{(k-1)!}|\rho|^{k-\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2}-k}\left(|\rho|\right),\quad k\geq 1,$$

где $\rho^2=x^2+y^2$,

$$K_\nu(|\rho|)=K_{-\nu}(|\rho|)=2^{-\nu-1}|\rho|^\nu\int_0^\infty \xi^{-\nu-1}e^{-\xi-\frac{|\rho|^2}{4\xi}}d\xi$$

– функция Макдональда порядка ν .

Отсюда принимая во внимание оценки для функции Макдональда (см.[4]), имеем

$$\left|B_k(x,y)\right| \le \begin{cases} C\left|\rho^2\right|^{k-\frac{3}{2}} e^{-\rho}, \ \rho \ge 1, \\ C\int\limits_{\rho}^{1} y^{2k-3} dy, \quad \rho < 1 \end{cases}$$

для любого $k \ge 1$.

Далее оценим

$$\left\| \int\limits_{R^2} G(x-z, y-s, t) u_0(z,s) dz ds \right\|_{L_p} \le C \left\| \int\limits_{R^2} B_k(x-z, y-s) u_0(z,s) dz ds \right\| \le$$

$$\le C \left\| u_0 \right\|_{L_p} \left(\int\limits_{\rho<1} d\rho \int\limits_{\rho}^{1} y^{2k-3} dy + \int\limits_{\rho \ge 1} \rho^{k-\frac{3}{2}} e^{-\rho} d\rho \right) \le C \left\| u_0 \right\|_{L_p},$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в выражении (3):

$$\left\| \int\limits_{R^2} G_1(x-z, y-s, t) f(z,s,t) dz ds \right\|_{L_p} \le C \left\| \int\limits_{R^2} B_{k+1}(x-z, y-s) f(z,s,t) dz ds \right\| \le$$

$$\le C \left\| f \right\|_{L_p} \left(\int\limits_{\rho<1} d\rho \int\limits_{\rho}^{1} y^{2k-3} dy + \int\limits_{\rho \ge 1} \rho^{k-\frac{3}{2}} e^{-\rho} d\rho \right) \le C \left\| f \right\|_{L_p},$$

Из последних оценок следует, что $u(x,y,t) \in C([0,T]; C(R^2) \cap L_p(R^2)$.

Теорема доказана.

Литература:

1. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка . – LAP.LAMBERT Academic Publishing 2011. –291 с.
2. Аблабеков Б.С. Фундаментальное решение задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде//Известия КГТУ им.И.Раззакова, № 9, Бишкек 2009.- С.8-101
3. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.
4. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852– 864.
5. Ватсон Дэю. Теория функций Бесселя. М.:Мир,1944.
6. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа [Текст] /А.Г.Свешников, А.Б.Альшин, М.О.Корпусов, Ю.Д.Плетнер. – М.: Физматлит, 2007. – 736с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.