ТЕХНИКА ИЛИМДЕРИ
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCE

Укуев Б.Т., Абыкеев К.Ж.

СЕРПИЛГИЧ ТОЛКУНДАРДЫН ЧӨЙРӨДӨГҮ КӨҢДӨЙ МЕНЕН ӨЗ АРА АРАКЕТТЕНҮҮСҮНҮН БАШТАПКЫ АБАЛЫ

Укуев Б.Т., Абыкеев К.Ж.

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ С ПОЛОСТЬЮ В СРЕДЕ

B.T. Ukuev, K.J. Abykeev

INITIAL STAGE OF INTERACTION OF THE ELASTIC WAVE WITH THE CAVITY IN ENVIRONMENT

УДК: 517.958

Бул иште серпилгич толкундардын чөйрөдөгү көңдөй менен өз ара аракеттенүүсүнүн баштапкы абалы үчүн чек арага жакын көңдөйүнүн параметрлерин эсептөө ыкмасы баяндалат. Мындай эсептөөлөр чөйрөнүн параметрлеринин маанилерин баалоо менен белгилүү бир чектерде жана чек араларында толкун күчтөрү канчалык көңдөйдүн чек арасына жакындаган сайын ошончолук кооптуу жагдай жаралаарын б.а. бузулуу башталаарын аныктоого мүмкүндүк берет.

Негизги сөздөр: *серпилгич толкундар, чөйрөдөгү көңдөй, серпилгич толкундардын чеги, узунунан кеткен толкундар, туурасынан кеткен толкундар, чыңалуунун σ_{nn} нормалдуу жана σ_{ne} жаныма компоненттери, жылышуу вектору, жылмакай томпок бет, серпилгич жылышуу потенциалы, толкун потенциалы, чектик катыш.*

В данной работе излагается способ расчета параметров среды вблизи границы полости для начальных моментов взаимодействия упругой волны с полостью. Такие расчеты позволят оценить порядки значений параметров среды, дадут возможность судить в определенных границах, насколько режим нагрузки вблизи границы полости близок к критическому, когда начинается разрушение.

Ключевые слова: *упругая волна, полость в среде, фронт упругой волны, уравнения среды, продольные волны, поперечные волны, нормальные σ_{nn} и касательные σ_{ne} компоненты напряжения, вектор смещения, гладкая выпуклая поверхность, потенциалы упругих смещений волновые потенциалы, предельные соотношения.*

The way of calculation of parameters of environment near cavity border for the initial moments of interaction of an elastic wave with a cavity is stated in this work. Such calculations will allow to estimate values orders of environmental parameters will give the chance to judge in certain borders, when destruction begins the loading mode near border of a cavity is near to critical.

Key words: *elastic wave, cavity in environment, front of an elastic wave, environment equation, longitudinal waves, cross waves, normal and tangent components of tension, shift vector, smooth convex surface, potentials of elastic shifts wave potentials, limit ratios.*

Пусть одномерная плоская упругая волна, распространяющаяся в безграничном пространстве, в некоторый момент времени $t = 0$ встречает на своем пути полость в среде. Будем предпологать, что полость ограничена гладкой выпуклой поверхностью. Поместим начало координат 0 прямоугольной декартовой системы координат 0_{xyz} с точкой, в которой в момент $t = 0$ фронт упругой волны касается границы полости. Ось O_z направим вдоль нормали к поверхности в глубь среды. Оси O_x, O_y разместим на касательной плоскости к поверхности, проходящей через точку О. Обозначим границу полости через S, а область, занятую средой -через τ .

Известно [1], что потенциалы упругих смещений φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, посредством которых составляющие вектора смещения u, v, w в направлении осей координат 0_x, 0_y, 0_z соответственно, представляются в виде

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}, \qquad (1)$$
$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}=b^2\left(\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial z^2}\right)\qquad (i=1,2,3.). \tag{3}$$

Функции ψ_1,ψ_2,ψ_3, как известно, обеспечивая выполнение соотношений (1), должны еще удовлетворять условию

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Краевые условия на границе полости заключаются в том, что нагрузка на ней отсутствует $\sigma_{nn}(M^1,t)=0$, $\sigma_{nm}(M^1,t)=0$, $\sigma_{nl}(M^1,t)=0$,

где $M^1\in S$, σ_{nn} -нормальная, а σ_{nn}, σ_{nl} - касательные компоненты напряжения.

Кроме основной системы координат O_{xyz} введем в рассмотрение локальные системы координат $O^1{}_{x^1y^1z^1}$, выбирая начала их в точках $O^1\in S$, направляя ось O^1z^1 вдоль нормали к поверхности S в точках O^1 в глубь среды и размещая оси Ox^1, Oy^1 в касательной плоскости к поверхности в точке O^1. В таких системах координат граничные условия принимают вид:

$$\sigma_{z^1z^1}(O^1,t)=0,\ \sigma_{x^1z^1}(O^1,t)=0,\ \sigma_{y^1z^1}(O^1,t)=0,\ \text{где } O^1\in S. \tag{5}$$

Согласно закону Гука граничные условия (5) могут быть представлены в виде:

$$\lim_{M\to 0^1}\left\{\ (\lambda\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^{12}}+\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial y^{12}})+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial z^{12}}+2\mu(\frac{\partial^2\psi_3(M,t)}{\partial x^1\partial y^1}=\frac{\partial^2\psi_3(M,t)}{\partial x^1\partial z^1})\ \right\}=0,$$

$$\lim_{M\to O^1}\left(2\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^1\partial z^1}+\frac{\partial^2\psi_3(M,t)}{\partial y^1\partial z^1}+\frac{\partial^2\psi_2(M,t)}{\partial x^{12}}-\frac{\partial^2\psi_2(M,t)}{\partial z^{12}}-\frac{\partial^2\psi_1(M,t)}{\partial x^1\partial y^1}\right)=0, \tag{6}$$

$$\lim_{M\to O^1}\left(2\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial y^1\partial z^1}+\frac{\partial^2\psi_2(M,t)}{\partial x^1\partial y^1}+\frac{\partial^2\psi_1(M,t)}{\partial z^{12}}-\frac{\partial^2\psi_1(M,t)}{\partial y^{12}}-\frac{\partial^2\psi_3(M,t)}{\partial x^1\partial z^1}\right)=0,$$

причем $M\in\tau,\quad O^1\in S$.

Нетрудно, исходя из единственности решения первой краевой задачи для волнового уравнения, показать, что для выполнения условия (4) в (τ) достаточно выполнения его на границе области (τ), т.е. на поверхности (S). Таким образом, кроме (6), имеем еще одно граничное условие:

$$\lim_{M\to O^1}\left\{\frac{\partial\psi_1(M,t)}{\partial x^1}+\frac{\partial\psi_2(M,t)}{\partial y^1}+\frac{\partial\psi_3(M,t)}{\partial z^1}\right\}=0. \tag{7}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2), (3), удовлетворяющих граничным условиям (6), (7) отыскивается в виде систем волновых потенциалов простого слоя:

$$\varphi(M,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_1)}\frac{\overline{\sigma}(M^1,t-r/a)}{r}dS_1, \tag{8}$$

$$\psi_i(M,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_2)}\frac{\gamma_i(M^1,t-r/b)}{r}dS_2\qquad (i=1,2,3), \tag{9}$$

причем $M\in\tau$, M^1 - переменная точка области интегрирования, (S_1) - часть поверхности (S), ограниченная линией $t-r/a=0$, (S_2) - часть ее, ограниченная линией $t-r/b=0$, r -расстояние между точками M и M^1, $\sigma(M^1,t),\gamma(M^1,t)$ $(i=1,2,3)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Подставляя непосредственно выражения (8), (9) в соответствующие волновые уравнения (2), (3), можно убедиться, что они удовлетворяются при произвольных непрерывных по совокупности аргументов вместе с частными производными первого и второго порядка по *t* функций

$\overline{\sigma}(M^1,t),\gamma(M^1,t)$ $(i=1,2,3)$ Таким образом вопрос сводится к отысканию указанных функций, которые обеспечивали бы еще удовлетворение граничных условий (6), (7).

В работах [2], [3] установлены предельные соотношения для частных производных потенциала простого слоя при стремлении точки *M* области, в которой они определяются непосредственно, к точке границы области, по которой распространен поверхностный интеграл, представляющий волновой потенциал.

Согласно результатам работы [3] имеем: (10)

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^{1^2}}=-\frac{1}{4a}\overline{\sigma}_t(0^1,t)+\frac{1}{2}f_{x^1x^1}(0,0)\overline{\sigma}(0,t)-\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{\sigma}(\delta_1\cos\theta,\delta_1\sin\theta,t-\delta_1/a)}{\delta_1}d\theta+$$
$$\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\left\{\left[\overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right]\left(\frac{3x^{1^2}}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\frac{x^{1^2}\overline{\sigma}_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\right\}ds+R_1(t,\delta_1)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial z^{1^2}}=\frac{1}{2a}\overline{\sigma}_t(0^1,t)-\frac{1}{2}\left[\ f_{x^1x^1}(0,0)+f_{y^1y^1}(0,0)\ \right]\overline{\sigma}(0,t)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ \frac{\overline{\sigma}(\delta_1\cos\theta,\delta_1\sin\theta,t-\delta_1/a)}{\delta_1}$$
$$d\theta+\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\left\{\left[\overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right]\left(\frac{3z^{1^2}}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\frac{z^{1^2}\overline{\sigma}_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\right\}ds+R_2(t,\delta_1),\qquad(11)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^1\partial z^1}=-\frac{1}{2}\overline{\sigma}_x(0^1,t)+\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left\{3\left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right/r^5+\frac{\overline{\sigma}_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\ \right\}$$
$$x^1z^1ds_3+R_3(t,\delta_1),\qquad(12)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^1\partial y^1}=\frac{1}{2}f_{x^1y^1}(0,0)\overline{\sigma}(0^1,t)+\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left\{3\left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right/r^5+\right.$$
$$\left.\frac{\overline{\sigma}_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\ \right\}x^1y^1ds_3+R_4(t,\delta_1),\qquad(13)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial y^{1^2}}=-\frac{1}{4a}\overline{\sigma}_t(0^1,t)+\frac{1}{2}f_{y^1y^1}(0,0)\overline{\sigma}(0,t)-\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{\sigma}(\delta_1\cos\theta,\delta_1\sin\theta,t-\delta_1/a)}{\delta_1}d\theta+$$
$$\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\left\{\left[\overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right]\left(\frac{3y^{1^2}}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\frac{y^{1^2}\sigma_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\right\}ds_3+R_5(t,\delta_1),\qquad(14)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial y^1\partial z^1}=-\frac{1}{2}\overline{\sigma}_y(0^1,t)+\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left\{3\left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\right/r^5+\frac{\overline{\sigma}_{tt}(M^1,t-r/a)}{a^2r^3}\ \right\}$$
$$y^1z^1ds_3+R_6(t,\delta_1),\qquad(15)$$

$$\lim_{M^1\to 0^1}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial x^1}=\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\ \right]\frac{x^1}{r^3}ds_3+R_7(t,\delta_1),\qquad(16)$$

$$\lim_{M^1\to 0}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial y^1}=\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\ \right]\frac{y^1}{r^3}ds_3+R_8(t,\delta_1),\qquad(17)$$

$$\lim_{M^1\to 0}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial z^1}=-\frac{1}{2}\overline{\sigma}(0^1,t)+\frac{1}{4\pi}\iint_{(S_3)}\ \left[\ \overline{\sigma}(M^1,t-r/a)+\frac{r}{a}\overline{\sigma}_t(M^1,t-r/a)\ \right]\frac{z^1}{r^3}ds_3+R_9(t,\delta_1),\qquad(18)$$

Сделаем пояснения к формулам (10)-(18). Для $M(x^1,y^1,z^1)\in\tau$ принимается:

$$\varphi(M,t) = \varphi(x^1, y^1, z^1, t).$$

Вследствие гладкости поверхности (S) цилиндр с осью O^1z^1 и достаточно малым радиусом поперечного сечения δ_1 «вырезает» некоторую окрестность точки O^1, представимую уравнением $z^1 = f(x^1, y^1)$. Обозначается: $S_3 = S_1 / S_1^1$. Для $M^1(x^1, y^1, f(x^1, y^1))$ принимается: $\sigma(M^1, t) = \sigma(x^1, y^1, t)$.

Предельные соотношения для частных производных функций $\psi_i(M,t)$, входящих в (6) и (7), представляются в виде, совершенно аналогичном (10)-(18) с заменой φ на ψ_i $(i = 1,2,3)$, $a -$ на b, $\delta_1 -$ на δ_2, $S_3 -$ на S_4. Цилиндр с осью O^1z^1 и достаточно малым радиусом поперечного сечения δ_2 «вырезает» некоторую окрестность S_2^1 точки O^1, представимую уравнением вида $z = f(x^1, y^1)$. Обозначается: $S_4 = S_2 / S_2^1$. Для $M^1(x^1, y^1, f(x^1, y^1)) \in S_2^1$ принимается: $\gamma(M^1, t) = \gamma(x^1, y^1, t)$. Аналогами для $R_1(t,\delta_1)$, $R_2(t,\delta_1)$, ... , $R_9(t,\delta_1)$ являются функции $R_{i1}(t,\delta_2)$, $R_{i2}(t,\delta_2)$, ... , $R_{i9}(t,\delta_2)$ $(i = 1,2,3)$.

В работе [3] установлено:

$$R_1(t,\delta_1) = 0(\delta_1),\ R_2(t,\delta_1) = 0(\delta_1), \dots,\ R_9(t,\delta_1) = 0(\delta_1), \qquad (19)$$

$$R_{i1}(t,\delta_2) = 0(\delta_2),\ R_{i2}(t,\delta_2) = 0(\delta_2), \dots,\ R_{i9}(t,\delta_2) = 0(\delta_2), \qquad (20)$$

где $(i = 1,2,3)$.

Подстановка в граничные условия (6), (7) вместо предельных значений частных производных их выражений согласно соответствующим соотношениям (10)-(18) и им подобным приводит к системе четырех интегро-дифференциальных уравнений относительно четырех плоскостей волновых потенциалов $\bar{\sigma}(M^1, t)$, $\gamma_1(M^1, t)$, $\gamma_2(M^1, t)$, $\gamma_3(M^1, t)$.

Для начальных моментов взаимодействия упругой волны с полостью предлагается следующий приближенный метод решения рассматриваемой задачи. Поскольку граница полости предполагается гладкой, то часть ее, которой достигает набегающая на полость упругая волна, расширяется в начальные моменты времени со сверхзвуковой скоростью. Поэтому размеры областей S_3, S_4 будут малыми величинами. Величины $R_1(t,\delta_1)$, $R_2(t,\delta_1)$, ... , $R_9(t,\delta_1)$, $R_{i1}(t,\delta_2)$, $R_{i2}(t,\delta_2)$, ... , $R_{i9}(t,\delta_2)$ причем $(i = 1,2,3)$, так же будут малыми величинами за счет выбора значений δ_1, δ_2. Указанными величинами в первом приближении можно пренебречь. Кроме того, можно пренебречь частными производными от $\bar{\sigma}$, γ, γ_2, γ_3 по геометрическим переменным, так как они являются малыми величинами того же порядка, который имеют пренебрегаемые величины, о которых речь шла выше. Покажем это, например, исходя из (12). Часть границы полости, которой достигает набегающая упругая волна, для начальных моментов времени мало отклоняется от плоскости. Поэтому для указанных моментов времени в области влияния полости режим движения среды будет близок к тому, который имел бы место, если бы упругая волна набегала на плоскость. В этом случае движение среды было бы одномерным, параметры среды не зависели бы от координат x^1, y^1. На этом основании, в пределах принятых допущений, можно считать, что левая часть (12) равно нулю. Поскольку мы, как обсуждалось выше, пренебрегаем в (12) еще интегральным слагаемым и величиной $R_3(t,\delta_1)$, то заключаем еще, что можно принято: $\bar{\sigma}_x(0^1, t)$.

На основании приведенных выше соображений соотношения (10)-(18) для начальных моментов времени взаимодействия упругой волны с полостью в среде можно приближенно представить в виде:

$$\lim_{M \to 0^1} \frac{\partial^2 \varphi(M,t)}{\partial x^{12}} = -\frac{1}{4a} \bar{\sigma}_t(0^1, t) + \frac{1}{2} f_{x^1x^1}(0,0) \bar{\sigma}(0^1, t) \ , \qquad (21)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial {z^1}^2}=\frac{1}{2a}\overline{\sigma}_t\left(0^1,t\right)-\frac{1}{2}\left[\ f_{x^1x^1}(0,0)+f_{y^1y^1}(0,0)\ \right]\overline{\sigma}\left(0^1,t\right), \qquad (22)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^1\partial z^1}=0, \qquad (23)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial x^1\partial y^1}=\frac{1}{2}f_{x^1y^1}(0,0)\overline{\sigma}\left(0^1,t\right), \qquad (24)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial {y^1}^2}=-\frac{1}{4a}\overline{\sigma}_t\left(0^1,t\right)+\frac{1}{2}f_{y^1y^1}(0,0)\overline{\sigma}\left(0^1,t\right), \qquad (25)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial^2\varphi(M,t)}{\partial y^1\partial z^1}=0, \ (26) \qquad \lim_{M\to 0^1}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial x^1}=0, \qquad (27)$$

$$\lim_{M\to 0^1}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial y^1}=0, \ (28) \qquad \lim_{M\to 0^1}\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial z^1}=-\frac{1}{2}\sigma\left(0^1,t\right), \qquad (29)$$

Подставляя формулы вида (21) - (29) в граничные условия (6), (7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно значений плотностей волновых потенциалов в точке $0^1\in S$:

$$\frac{\mu}{a}\overline{\sigma}_t\left(0^1,t\right)-\mu\left[f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right]\overline{\sigma}\left(0^1,t\right)+\mu\, f_{x^1y^1}(0^1)\gamma_3\left(0^1,t\right)=0, \qquad (30)$$

$$-\frac{3}{4a}\gamma_{2t}\left(0^1,t\right)+\left[f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+\frac{1}{2}f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right]\gamma_2\left(0^1,t\right)-\frac{1}{2}f_{x^1y^1}(0^1)\gamma_1\left(0^1,t\right)=0, \qquad (31)$$

$$\frac{3}{4a}\gamma_{1t}\left(0^1,t\right)-\left[\frac{1}{2}f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right]\gamma_1\left(0^1,t\right)+\frac{1}{2}f_{x^1y^1}(0^1)\gamma_2\left(0^1,t\right)=0, \qquad (32)$$

$$\gamma_3\left(0^1,t\right)=0, \qquad (33)$$

причем введены обозначения - $f_{x^1x^1}\left(0^1\right)=f_{x^1x^1}(0,0)$, $f_{y^1y^1}\left(0^1\right)=f_{y^1y^1}(0,0)$, $f_{x^1y^1}\left(0^1\right)=f_{x^1y^1}(0,0)$, так как частные производные относятся к локальной системе координат с началом в точке $0^1\in S$.

На основании (30) и (33) имеем:

$$\frac{1}{a}\overline{\sigma}_t\left(0^1,t\right)-\left[f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right]\overline{\sigma}\left(0^1,t\right)=0.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид:

$$\sigma\left(0^1,t\right)=C_1 e^{a\left[f_{x^1x^1}(0^1)+f_{y^1y^1}(0^1)\right]t}, \qquad (34)$$

где C_1 - произвольная постоянная.

Обратимся к системе уравнений (31), (32). Разрешив уравнения относительно производных, представим их в виде:

$$\gamma_{1t}\left(0^1,t\right)=a_{11}\gamma_1\left(0^1,t\right)+a_{12}\gamma_2\left(0^1,t\right),$$
$$\gamma_{2t}\left(0^1,t\right)=a_{21}\gamma_1\left(0^1,t\right)+a_{22}\gamma_2\left(0^1,t\right), \qquad (35)$$

где обозначено -

$$a_{11}=\frac{4a}{3}\left[\frac{1}{2}f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right], \qquad a_{12}=-\frac{2a}{3}f_{x^1y^1}(0^1),$$
$$a_{21}=\frac{4a}{3}\left[f_{x^1x^1}\left(0^1\right)+\frac{1}{2}f_{y^1y^1}\left(0^1\right)\right], \qquad a_{22}=-\frac{2a}{3}f_{x^1y^1}(0^1), \qquad (36)$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, к которым относится система (35), подробно изучены. Согласно имеющейся теории решения системы (35) отыскиваются в виде:

$$\gamma_1\left(0^1,t\right) = A_1 e^{\lambda t}, \quad \gamma_2\left(0^1,t\right) = A_2 e^{\lambda t}, \tag{37}$$

где A_1, A_2 - константы, а λ - корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \left(a_{11}-\lambda\right)\left(a_{22}-\lambda\right) - a_{21}a_{12} = 0. \tag{38}$$

В зависимости от значений коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, которые согласно (36) определяются конкретным видом поверхности S возможны следующие три случая.

1. Корни уравнения (38) действительны и различны. Обозначим их через λ_1 и λ_2. Тогда согласно (37) имеются два линейно независимых решения системы (36):

$$\gamma_1^{(1)}\left(0^1,t\right) = A_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \gamma_2^{(1)}\left(0^1,t\right) = A_2^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \tag{39}$$

$$\gamma_1^{(2)}\left(0^1,t\right) = A_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad \gamma_2^{(2)}\left(0^1,t\right) = A_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \tag{40}$$

где $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$, и $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ являются нетривиальными решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} &\left(a_{11}-\lambda\right)A_1 + a_{12}A_2 = 0 \\ &a_{21}A_1 + \left(a_{22}-\lambda\right)A_2 = 0 \end{aligned}, \tag{41}$$

при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ соответственно.

Общее решение системы (36) представится в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1\left(0^1,t\right) &= C_2\, \gamma_1^{(1)}\left(0^1,t\right) + C_3\gamma_1^{(2)}\left(0^1,t\right), \\ \gamma_2\left(0^1,t\right) &= C_2\, \gamma_2^{(2)}\left(0^1,t\right) + C_3\gamma_2^{(2)}\left(0^1,t\right), \end{aligned} \tag{42}$$

где C_2, C_3 - произвольные постоянные.

2. Корни уравнения (38) комплексные. В этом случае, отделяя в (39), (40) действительные и мнимые части, получим два линейно независимых действительных решения системы (36) вида

$$\gamma_1^{(1)}\left(0^1,t\right) = B_1^{(1)} e^{\alpha t}\cos\beta\, t, \; \gamma_2^{(1)}\left(0^1,t\right) = B_2^{(1)} e^{\alpha t}\cos\beta\, t, \tag{43}$$

$$\gamma_1^{(2)}\left(0^1,t\right) = B_1^{(2)} e^{\alpha t}\sin\beta\, t, \; \gamma_2^{(2)}\left(0^1,t\right) = B_2^{(2)} e^{\alpha t}\sin\beta\, t, \tag{44}$$

где α, β действительная и мнимая части, соответственно, комплексных корней λ_1 и λ_2. Общее решение системы (36) представляется в виде (42), где, однако, функции выражаются согласно (43), (44).

3. Корень уравнения (38) λ - действительный кратный. В этом случае два линейно независимых решения системы (36) имеют вид

$$\gamma_1^{(1)}\left(0^1,t\right) = D_1 e^{\lambda t}, \; \gamma_2^{(1)}\left(0^1,t\right) = D_2 e^{\lambda t}, \tag{45}$$

$$\gamma_1^{(2)}\left(0^1,t\right) = D_1 t e^{\lambda t}, \; \gamma_2^{(2)}\left(0^1,t\right) = D_2 t e^{\lambda t}, \tag{46}$$

где D_1, D_2 - нетривиальное решение системы (41). Общее решение системы (36) имеет вид (42), где функции представляются согласно (45), (46). Таким образом определяются плотности волновых потенциалов $\sigma\left(0^1,t\right)$, $\gamma_1\left(0^1,t\right)$, $\gamma_2\left(0^1,t\right)$, $\gamma_3\left(0^1,t\right)$. Значение постоянных C_1 в (34) и C_2, C_3 - в (42) определяются соответственно режиму за фронтом набегающей на полость упругой волны. Подставляя найденные изложенным выше способом выражения для плотностей волновых потенциалов в (8), (9) получим решение рассматриваемой задачи в квадратурах.

Литература:

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. -М: Высшая школа, 1971.-288 с.
2. Шамгунов Ш. Д. Предельные соотношения для частных производных волнового потенциала простого слоя и их приложения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 21- Фрунзе: Илим, 1988.-с 281-290.
3. Шамгунов Ш. Д., Шемякина Т. А. Предельные соотношения для кратных частных производных второго порядка волнового потенциала простого слоя и их приложения //Ред. Изв. НАН КР.- ДЕП. ВИНИТИ, №1615- В96 Деп.

Рецензент: к.ф.-м.н, доцент Осмонканов А.М.