Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА

B.S. Ablabekov, A.B. Baiserkeeva

ON THE SOLVABILITY OF A TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF DETERMINING SOURCE

УДК: 517.95

Бул иште псевдопараболалык теңдемедеги эки өлчөмдүү булак функциясын аныктоо тескери маселеси изилденген. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан жана бир мейкиндиктеги өзгөрмөдөн көз каранды болгон белгисиз булак функциясын ички чекиттеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденет.

***Негизги сөздөр:** тескери маселе, псевдопараболалык тендеме, кошумча шарт.*

В работе исследована двумерная обратная задача определения источника в псевдопараболическом уравнении третьего. Обратная задача состоит в определении неизвестную правую часть зависящего от времени и одной пространственных переменных по переопределению во внутренней точке. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

***Ключевые слова:** обратная задача, псевдопараболическое уравнение, условия переопределения*

We have investigated two-dimensional inverse problem of determining a source in pseudoparabolic equation. The inverse problem is to determine the unknown right side of the time-dependent and spatial variables on a redefinition of the interior points. We prove existence and uniqueness of solutions to the inverse problem.

***Key words:** inverse problem, pseudoparabolic equation, over determination conditions*

Введение и постановка задачи.

Введем следующие обозначения:

$$Ц_T = \{ (x,t) |\quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T \}, \; T > 0; \qquad Q_T = \{ (z,t) | \, z \in R, \quad 0 < t \le T \};$$

$$D = \{ (x,z) | \, x \in (0,l), z \in R \}; \; D_T = D \times (0,T];$$

Пространство $A_s(r)$ с нормой $\|\varphi(y)\|_s(r)$ является банаховым пространством аналитических функций. Считая параметр *s* фиксированным, а параметр *r*- переменным, мы получим шкалу банаховых пространств аналитических функций $A_s(r), \quad r > 0, \quad s > 0$.

Введенное пространство [5] обладает следующими свойствами операций умножения и дифференцирования:

1.Если $\varphi(y) \in A_s(r)$, то $\varphi(y) \in A_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0,s)$. Следовательно, $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$ при $s' < s$.

2. Если $\varphi(y) \in A_s(r)$, то $D^\alpha \varphi(y) \in A_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0,s)$ и для любого α, а также справедливо неравенство

$\|D^\alpha \varphi\|_{s'}(r) \le C_\alpha \|\varphi\|_s(r) / (s - s')^{|\alpha|}$, где постоянная C_α зависит только от α.

Из этого неравенства, в частности следует

$$\left\| \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k} \right\|_{s'}(r) \le k^k \|\varphi\|_s(r) / (s - s')^k, \quad \|\Delta\varphi\|_{s'}(r) \le \frac{4n}{(s - s')^2} \|\varphi\|_s(r).$$

Рассмотрим в области D_T задачу Гурса

$$u_t - (u_t + u)_{xx} - (u_t + u)_{zz} = f(x,t) h(x,z,t), \quad (x,z,t) \in D_T, \qquad (1)$$

$$u(x,z,0)=u_0(x,z), \quad (x,z)\in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u(0,z,t)=\varphi_1(z,t), \quad u_x(0,z,t)=\varphi_2(z,t), \quad (z,t)\in \overline{Q}_T. \tag{3}$$

Здесь $u_0(x,z), \quad h(x,z,t)$, $\varphi_i(z,t), i=1,2$ - действительные заданные функции.

Обратная задача. Требуется найти пару функций $\{u(x,z,t), f(x,t)\}$ из соотношений (1)-(3), если она удовлетворяют следующему условию переопределения

$$u(x,0,t)=\psi(x,t), \qquad (x,t)\in \overline{Ц}_T \tag{4}$$

Будем считать, что выполнены условия согласования

$$\begin{gathered} u_0(0,z)=\varphi_1(z,0), \quad u_{0x}(0,z)=\varphi_2(z,0), \\ u_0(x,0)=\psi(x,0), \varphi_1(0,t)=\psi(0,t), \quad \varphi_{2z}(0,t)=\psi_x(0,t), \end{gathered} \tag{5}$$

Многомерные обратные задачи нахождения источника и коэффициента в псевдопараболическом уравнении в различной постановке ранее изучались в работах [1–3]. В работе [4], методом полуобращения псевдопараболического оператора, построены соответствующие решения задачи Коши и начально-краевой задачи. В этой работе рассматривается задача идентификации функции источника, которые не зависят от одной из пространственных переменных. Дополнительное условие задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой искомый коэффициент не зависит.

1.Сведение обратной задачи к прямой задаче для нагруженного уравнения.

Приведем задачу (1)-(4) к некоторой вспомогательной задаче. Для этого положим $z=0$ в уравнении (1). Учитывая условие (4), получим соотношение

$$\psi_t(x,t)=(\psi_t(x,t)+\psi(x,t))_{xx}+(u_t+u)_{zz}(x,0,t)+f(x,t)h(x,0,t). \tag{6}$$

Из (6) находим

$$f(x,t)=A(x,t)+h^{-1}(x,0,t)(u_t+u)_{zz}(x,0,t), \tag{7}$$

Здесь

$$A(x,t)=\frac{(\psi_t-(\psi_t+\psi_1)_{xx})}{h(x,0,t)}$$ - известная функция.

Подставляя функцию $f(x,t)$ в уравнение (1), приходим к задаче Гурса для линейного нагруженного уравнения

$$u_t=(u_t+u)_{xx}+(u_t+u)_{zz}-h(x,z,t)h^{-1}(x,0,t)(u_t+u)_{zz}(x,0,t)+A(x,t))h(x,z,t), \tag{8}$$

$$u(x,z,0)=u_0(x,z), \quad (x,z)\in \overline{D}, \tag{9}$$

$$u(0,z,t)=\varphi_1(z,t), \quad u_x(0,z,t)=\varphi_2(z,t), \quad (z,t)\in \overline{Q}_T. \tag{10}$$

Вводя обозначение $u_{zz}(x,z,t)=w(x,z,t)$, из задачи (8)-(9), получим

$$w_t=(w_t+w)_{xx}+(w_t+w)_{zz}-h_{zz}(x,z,t)h^{-1}(x,0,t)(w_t+w)(x,0,t)+A(x,t))h_{zz}(x,z,t), \tag{11}$$

$$w(x,z,0)=u_0''(x,z), \quad (x,z)\in \overline{D}, \tag{12}$$

$$w(0,z,t)=\varphi_1''(z,t), \quad w_x(0,z,t)=\varphi_2''(z,t), \quad (z,t)\in \overline{Q}_T. \tag{13}$$

Введем новую неизвестную функцию $w_t+w=v(x,z,t)$.

Тогда $v(x,z,t)$ будет удовлетворять условиям

$$-v_{xx}+v-v_{zz}-\int_0^t e^{-(t-\tau)}v(x,z,\tau)d\tau-h(x,z,t)h^{-1}(x,0,t)v(x,0,t)=h_1(x,z,t), \tag{14}$$

$$v(0,z,t)=\widetilde{\varphi}_1(z,t), \quad v_x(0,y,t)=\widetilde{\varphi}_2(z,t), \tag{15}$$

где

$$h_1(x,z,t) = e^{-t}u''_{0z}(x,z) + A(x,t)h''_z(x,z,t),$$
$$\widetilde{\varphi}_1(z,t) = \varphi_1^{(2,1)} + \varphi_1^{(2,0)}, \quad \widetilde{\varphi}_2(z,t) = \varphi_2^{(2,1)} + \varphi_2^{(2,0)}.$$

Обращая в задаче (14)-(15) оператор $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + I$, получим

$$v(x,z,t) = C_1(z,t)e^{x} + C_2(z,t)e^{-x} + \int_0^x sh(x-\xi)[v_{zz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)v(\xi,0,t)]d\xi +$$
$$+\int_0^x\int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)}v(\xi,z,\tau)d\tau d\xi + \int_0^x sh(x-\xi)h_1(\xi,z,t)d\xi \text{ ю} \qquad (16),$$

Подбираем C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись граничные условия (15), т.е.

$$C_1(z,t) + C_2(z,t) = \widetilde{\varphi}_1(z,t),$$
$$C_1(z,t) - C_2(z,t) = \widetilde{\varphi}_2(z,t).$$

Отсюда относительно функций $C_1(z,t)$ и $C_2(z,t)$, получим

$$C_1(z,t) = 2^{-1}(\widetilde{\varphi}_1(z,t) + \widetilde{\varphi}_2(z,t)), C_2(z,t) = 2^{-1}(\widetilde{\varphi}_1(z,t) - \widetilde{\varphi}_2(z,t)).$$

Подставляя найденные $C_1(z,t)$, $C_2(z,t)$ в (16), имеем

$$v(x,z,t) = \int_0^x\int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)}v(\xi,z,\tau)d\tau d\xi +$$
$$+\int_0^x sh(x-\xi)[v_{zz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)v(\xi,0,t)]d\xi + v_0(x,z,t). \qquad (17)$$

где

$$v_0(x,z,t) = \widetilde{\varphi}_1(z,t)chx + \widetilde{\varphi}_2(z,t)shx + \int_0^x sh(x-\xi)h_1(\xi,z,t)d\xi.$$

По отношению к уравнению (17) справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

ТЕОРЕМА. Пусть функции $\varphi_j(z,t) \in C^{(2,1)}(\overline{Q}_T)$, $j = 1,2$, $u_0(x,z) \in C^{(4,2)}(\overline{D})$, $h(x,z,t) \in C^{(2,1)}(\overline{D}_T)$ являются при фиксированных *t* и *x* элементами $A_{s_0}(a,b)$, непрерывными соответственно для $t \in [0,T]$ и $x \in [0,l]$, $\psi(x,t) \in C^{(2,1)}(\overline{Ц}_T)$, а для функций $u_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ выполнены условия согласования (5), кроме того, $|h(x,0,t)| \ge \alpha > 0, \alpha - const$, $\max\limits_{x,t}\|v_0(x,z,t)\|_{s_0} = R_0$.

Тогда существует такое $a > 0, as_0 < l, a = (s_0, T, l, R_0)$, что для любого $s \in (0, s_0)$ в области $F_s = \{(x,z,t) | 0 \le x \le a(s_0 - s) < l, |z| < r, 0 < t < T\}$

существует единственное решение уравнения (17) такое, что $v \in A_s$ при каждом $(x,t) \in Q_{ST} \equiv \{0 < x < a(s_0 - s), 0 < t < T\} \cap G_T$ и непрерывны в Q_{ST} по переменным *x, t,* причем

$$\|v - v_0\|_s(x,t) \le R_0/(s - s_0). \qquad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем уравнения (14) будем рассматривать в области $D_T = D \times (0,T]$. В силу сделанных предположений функции $\varphi_j(z,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $j = 1,2$, $u_0(x,z) \in C^2(\overline{D})$, $h(x,z,t) \in C^{(2,1)}(\overline{D}_T)$ являются при каждом фиксированных *t* и *x* элементами $A_{s_0}(a,b)$, непрерывными по $(x,t) \in \overline{Ц}_T$ и $\left\|\widetilde{\varphi}_1\right\|_s(t) \le R_0$, $\left\|\widetilde{\varphi}_2\right\|_s(t) \le R_0$, $\left\|h\right\|_s(x,t) \le R_0$

Тогда

$$\left\|v_0\right\|_s(x,t) = \left\|\widetilde{\varphi}_1(z,t)chx + \widetilde{\varphi}_2(z,t)shx + \int_0^x sh(x-\xi)h_1(\xi,z,t)d\xi\right\|_s \le$$

$$\le C\left[\left\|\widetilde{\varphi}_1\right\|_s(t) + \left\|\widetilde{\varphi}_2\right\|(t) + l\left\|h\right\|_s(x,t)\right] = R_0.$$

Далее применим методику В.Г.Романова [5] и введем монотонно убывающую последовательность чисел a_0, $a_1,\ldots,a_n,\ldots,$ определив ее равенствами

$$a_{n+1} = a_n \Big/ \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

индуцированную ею последовательность вложенных областей

$$F_n = \left\{(x,t,s)\right| \ 0 \le x \le a_n(s_0 - s), 0 \le t \le T, 0 < s < s_0\left.\right\}.$$

Обозначим

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{(n+1)^2}}.$$

Построим метод последовательных приближений по схеме:

$$v_{n+1}(x,z,t) = v_0(x,z,t) + \int_0^x\int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)}v_n(\xi,z,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^x sh(x-\xi)[v_{nzz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)v_n(\xi,0,t)]d\xi.$$

Введем разность $v_{n+1} - v_n = \vartheta_n, n = 0,1,\ldots.$

Очевидно, что

$$\vartheta_{n+1}(x,z,t) = \int_0^x\int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)}\vartheta_n(\xi,z,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^x sh(x-\xi)[\vartheta_{nzz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)\vartheta_n(\xi,0,t)]d\xi.$$

Покажем, что при подходящем выборе a_0 для любого n=0, 1, 2, ...

$$\lambda_n = \max\left\{\sup_{x,t,s\in P_n}\left[\left\|\vartheta_n\right\|_s(x,t)\frac{a_n(s_0-s)-x}{x}\right]\right\},$$

$$\left\|v_{n+1} - v_0\right\|_s(x,t) \le R_0/(s_0 - s), (x,t,s) \in F_{n+1}$$

Получим оценку для $\left\|\vartheta_0\right\|_s(x,t)$:

$$\vartheta_0(x,z,t) = \int_0^x \int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)} v_0(\xi,z,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^x sh(x-\xi)[v_{0zz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)v_0(\xi,0,t)]d\xi.$$

Используя оценку [4,314с]

$\left\|(v_0)_{zz}\right\|_s \le \dfrac{4R_0}{(s(\xi)-s)^2}$, где $s(\xi) = \dfrac{1}{2}(s+s_0-\xi/a_0)$,

имеем

$$\left\|\vartheta_0\right\|_S(x,t) = \left\|\int_0^x \int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)} v_0(\xi,z,\tau)d\tau d\xi\right\|_S +$$

$$+\left\|\int_0^x sh(x-\xi)[v_{0zz}(\xi,z,t) - h(\xi,z,t)h^{-1}(\xi,0,t)v_0(\xi,0,t)]d\xi\right\|_S \le$$

$$\le CR_0a_0(s-s_0) + C\int_0^x \left[\frac{4R_0}{(s(\xi)-s)^2} + R_0^2\right]d\xi \le C\,a_0R_0(s-s_0) + CR_0^2x \le$$

$$+\left.\frac{16R_0}{((s_0-s)a_0-\xi)}\right|_0^x \le CR_0a_0(s-s_0) + CR_0^2x + \frac{16a_0R_0C}{(s_0-s)(a_0(s_0-s)-x)}, \quad x,\,t,\,s \in F_0.$$

Таким образом, $\lambda_0 \le a_0R_0C(16+R_0s_0^2)\max(1,a_0) \equiv R_0\mu_0$.

Кроме того, для $(x,t,s) \in F_1$, имеем

$$\left\|\vartheta_0\right\|_s(x,t) = \left\|v_1 - v_0\right\|_s(x,t) \le \frac{\lambda_0 a_0 x}{(a_0(s_0-s)-x)} \le \frac{\lambda_0 a_0 a_1(s_0-s)}{(a_0(s_0-s)-a_1(s_0-s))} =$$

$$= \frac{\lambda_0 a_0 a_1}{(a_0-a_1)^2(s_0-s)} \le \frac{2\lambda}{s_0-s} \le \frac{2\mu_0 R_0}{s_0-s}.$$

Если выбрать a_0 так, чтобы $2\mu_0 \le 1$, то при $n=0$ будут выполнены неравенства (18).

Сформулируем индуктивное предположение. Предположим, что для *n*=0, 1, 2, ... неравенства (18) имеют место при подходящем выборе a_0.

Тогда для $(x,t,s) \in F_{k+1}$ находим

$$\left\|\vartheta_{k+1}\right\|_S(x,t) \le \int_0^x \int_0^t sh(x-\xi)e^{-(t-\tau)} \left\|\vartheta_k\right\|_S(\xi,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^x sh(x-\xi)[\left\|\vartheta_{kzz}\right\|_S(\xi,t) + \left\|h\right\|_s(\xi,t)\left\|h^{-1}(\xi,0,t)\right\|\left\|\vartheta_k\right\|_S(\xi,0,t)]d\xi \le$$

$$\le C\int_0^x \left\{R_0\frac{\lambda_k a_k \xi}{(a_{k+1}(s_0-s)-\xi)^2} + \frac{4\lambda_k a_k \xi}{(s(\xi)-s)^2(a_{n+1}(s_0-s)-\xi)^2} + \frac{(4R_0^2+1)\lambda_k a_k \xi}{(a_{k+1}(s_0-s)-\xi)^2}\right\}d\xi.$$

при выборе $s(\xi)$ в виде $s(\xi) = \dfrac{1}{2}(s+s_0-\xi/a_{k+1})$. Из последнего неравенства, оценивая интегралы, получаем

$$\left\|\vartheta_{k+1}\right\|_s(x,t) \le \lambda_k a_0\left[16+R_0+(R_0^2+R_0+1)(3s_0+s_0^2)\right]\frac{a_{k+1}\xi}{(a_{k+1}(s_0-s)-x)}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\lambda_{k+1} \le \lambda_k \rho, \quad \lambda_{k+1} < \infty,$$

где

$$\rho = a_0\left[16 + R_0 + (R_0^2 + R_0 + 1)(3s_0 + s_0^2)\right]\frac{a_{k+1}x}{(a_{k+1}(s_0 - s) - x)^2}.$$

Кроме того, для $(x,t,s) \in F_{k+2}$ имеем

$$\left\|\vartheta_{n+2} - \vartheta_0\right\|_s (x,t) \le \sum_{n=0}^{k+1}\left\|\vartheta_n\right\|_s (x,t) \le \sum_{n=0}^{k+1}\frac{\lambda_k x}{(a_n(s_0 - s) - x)^2} \le \frac{1}{s_0 - s}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\lambda_k a_{k+2} a_n}{(a_{n+2} - a_n)^2} \le$$

$$\le \frac{2\lambda_0}{s_0 - s}\sum_{n=0}^{k+1}\rho^n (n+1)^4.$$

Выберем теперь a_0 таким, что $\rho < 1, \quad 2a_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n (n+1)^4 \le 1.$

Тогда

$$\left\|\vartheta_{k+2} - \vartheta_0\right\|_s (x,t) \le \frac{R_0}{s_0 - s}, \; (x,t,s) \in F_{k+2}$$

и метод индукции оправдан. Так как выбор a_0 не зависит от номера приближения, то все приближения ϑ_n как функции z принадлежат A_s для $(x,t,s) \in F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n,$ непрерывны по x, t и для них имеет место неравенство (18).

При $s \in (0, s_0)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n (x,y,t)$ сходятся равномерно в норме A_s по переменной z и в норме пространства $C(Q_{ST})$ по переменным x, t, где область Q_{ST} определена в формулировке теоремы. Поэтому предельная функция $\vartheta = \lim_{n\to\infty}\vartheta_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n + \vartheta_0$ являются элементами из A_s, непрерывны по $(x,t) \in Q_{ST}$ и удовлетворяют уравнениям (14).

Построенный метод последовательных приближений гарантирует локальную единственность решения системы (14).

Теорема доказана.

Литература:

1. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка . – LAP.LAMBERT Academic Publishing 2011. –291 с.
2. Аблабеков, Б.С. Двумерная обратная задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка //Вестн. КазНПУ им. Абая. Сер. физ.-мат. науки.–2005.- №2(13). – С.13– 19.
3. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи определения источника и коэффициента // Вестн. КазНПУ им. Абая. Сер.физ.-мат. науки. –2010.- №4(32). –С.3 – 8.
4. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.
5. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи.– Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457с.
6. Романов В.Г. О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа //Дифференц.уравнения.-1989.-Т.25,№2.-С.275–283.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.