Кокозова А.Ж.

БАЧЫМ ЖАНА БОО БУЛАКТУУ ТЕЛЕГРАФТЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЭКИЛИК ТҮЗ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН ЖАЛГЫЗДЫГЫ

Кокозова А.Ж.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

A.J. Kokozova

UNIQUENESS OF SOLVING TWO-DIMENSIONAL GEOELECTRIC DIRECT PROBLEMS WITH INSTANT AND CORDED SOURCES

УДК: 517.962.2, 517.956.3

Бул макалада бачым жана боо булактуу телеграфтык теңдеменин экилик түз маселеси каралган жана чечиминин жалгыздыгынын теоремасы далилденген. Бул түз маселе пайда болду тескери маселенинин чечимин чыгарууда.

Негизги сөздөр: *телеграфтык теңдеме, экилик, түз маселе, бачым жана боо булактар, жалгыздык, баалоо.*

В данной работе рассмотрена двумерная прямая задача для телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источниками и доказана теорема единственности. Необходимо отметить, что данная задача рассмотрена в такой постановке, которая необходима решить обратную задачу.

Ключевые слова: *телеграфное уравнение, двумерная, прямая задача, мгновенный и шнуровый источник, единственность, оценка.*

In this article, we consider a two-dimensional direct problem for a telegraph equation with instantaneous and corded sources, and we prove a uniqueness theorem. It should be noted that this problem is considered in such a formulation that it is necessary to solve the inverse problem.

Key words: *telegraph equation, two-dimensional, direct problem, instantaneous and cord source, uniqueness, evaluation.*

Введение. Известно, что телеграфное уравнение описывает процесс распространения волн напряженности и тока, напряженности электрического и магнитного поля, в длинной линии [1]. Динамические процессы в длинных линиях являются актуальной задачей электротехники и их исследования представляют достаточно сложную проблему.

Неоднородность электрических длинных линий, потери напряженности и тока в линиях, усложняет решения задачи анализа динамических процессов.

Передача электромагнитной энергии по длинной линии с помощью токов проводимости описывается также телеграфными уравнениями и они представляют собой законы Кирхгофа для замкнутого контура.

В случае когда линия обладает длинной, превышающий длину электромагнитные волны, передаваемой по этой линии, тогда проявляются эффекты: волна может многократно отражается от концов линии; искажается при распространении волн вдоль линии и др.

В этом случае линию необходимо рассматривать как среду, в которой распространяется электромагнитные волны [2,3,4].

Постановка задачи. Напряженность электрического поля по двум пластинам выражается двумерным телеграфным уравнением следующего вида [1-4]:

$$\mathrm{E}''_{tt}(z,y,t)=\frac{\bar{c}^2(z,y)}{\bar{\varepsilon}(z,y)\bar{\mu}(z,y)}\Delta\mathrm{E}(z,y,t)-\frac{\bar{\sigma}(z,y)}{\bar{\varepsilon}(z,y)}\mathrm{E}'_t(z,y,t),\qquad (z,t)\in R^2_+,\ y\in R, \tag{1}$$

где $\bar{c}(z,y)$ - скорость распространения электромагнитных волн, $\bar{\varepsilon}(z,y)\bar{\mu}(z,y)$ - электрическая и магнитная проницаемость, $\bar{\sigma}(z,y)$ - электропроводимость среды, $\mathrm{E}(z,y,t)$- напряженность электрического поля, $\Delta\mathrm{E}(z,y,t)=\mathrm{E}''_{zz}+\mathrm{E}''_{yy}$ - оператор Лапласа.

Для определения однозначного единственного решения уравнения (1) среди многих решений, нам необходимо должно задаваться начальное и граничное условие.

Пусть задано условие следующего вида

$$\mathrm{E}(z,y,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \qquad \mathrm{E}'_z(z,y,t)\big|_{z=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t), \qquad t\in(0,\mathrm{T}),\, y\in[-D,D], \qquad (2)$$

где - дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ - тета-функция Хевисайда, $h(y), r(y)$ - сила источников. Под действием этих сил начинается электромагнитный процесс. Условие (2) называется мгновенным и шнуровым источниками.

Пусть относительно коэффициентов уравнения (1)и относительно источников выполняется следующие условия

$$\left.\begin{array}{l}\bar{c}(z,y), \bar{\varepsilon}(z,y), \bar{\mu}(z,y), \bar{\sigma}(z,y)\in\Lambda_1,\\ h(y), r(y)\in\Lambda_2,\end{array}\right\} \qquad (3)$$

где
$$\Lambda_1=\{\varepsilon(z,y)\in C^6((0,d)\times(-D_1,D_1)), \sup p\{\varepsilon(z,y)\}\in((0,d)\times(-D_1,D_1))),$$
$$a=\|\varepsilon(z,y)\|_{C^2}\le \mathrm{M}_1, \qquad 0<\mathrm{M}_1\le\varepsilon(z,y)\le\mathrm{M}_2\},$$

$$\Lambda_2=\{\sup p \qquad h(y)\in(-D,D), \qquad h(y)\in C^5(-D,D)\}.$$

Здесь $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, D_1, d$ - положительные постоянные,

$$D=D_1+\mathrm{T}(\mathrm{M}_2+a), \qquad T=2d/(\mathrm{M}_1-a).$$

Здесь T - время, порожденное возмущением электрической напряженности функциями источниками $r(y), h(y)$, которое достигает глубины d и вернется обратно на поверхность $z=0$ для всех y.

Сведения задачи (1)-(2) к регулярной задаче. Введем новую переменную $\alpha(z,y)$, которая является решением задачи Эйконала следующего вида, следуя работы [5]:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_z^2(z,y)+\alpha_y^2(z,y)=\dfrac{\bar{\varepsilon}(z,y)\cdot\bar{\mu}(z,y)}{\bar{c}^2(z,y)},\\ \alpha(z,y)\Big|_{z=0}=0, \qquad \alpha_z(z,y)\Big|_{z=0}=\dfrac{\bar{\varepsilon}(0,y)\cdot\bar{\mu}(0,y)}{\bar{c}^2(0,y)},\\ \alpha_z(z,y)>0, \qquad \lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z,y)=0,\end{array}\right\}$$

и введем новые функции

$$\mu(\alpha,y)=\bar{\mu}(z,y), \qquad \varepsilon(\alpha,y)=\bar{\varepsilon}(z,y), c(\alpha,y)=\bar{c}(z,y), \sigma(\alpha,y)=\bar{\sigma}(z,y), \vartheta(\alpha,y,t)=\mathrm{E}(z,y,t).$$

Выделения регулярных и сингулярных частей решения. Для этого представим решение задачи (4) в следующем виде [5]:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=S(\alpha,t)\theta(t-|\alpha|)+R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|)+\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t),$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$- непрерывная функция, $\theta_1(t)=t\theta(t)$.

Тогда учитывая результаты [4,5], получим прямую задачу с данными на характеристиках

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2} + L_1 \vartheta(\alpha, y, t), \quad |\alpha| < t < T, \qquad y \in (-D, D),\\
&\vartheta(\alpha, y, t)\Big|_{|\alpha| = t} = S(t, y), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y \in (-D, D),\\
&\vartheta(\alpha, y, t)\Big|_{y = -D} = \vartheta(\alpha, y, t)\Big|_{y = +D} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$L_1 \vartheta(\alpha, y, t) = \frac{c^2(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)\mu(\alpha, y)}\left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \Delta\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \alpha_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha \partial y}\right] - \frac{\sigma(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Определим некоторые равенства, которые необходимы в дальнейшем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big|_{|\alpha| = t} = S_y(t, y), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y \in (-D, D),\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big|_{|\alpha| = t} = S_t(t, y) + R(t, y), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y \in (-D, D),\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big|_{|\alpha| = t} = -sign\alpha R(t, y), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y \in (-D, D),
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Обобщенным решением задачи (4) назовем функцию $\vartheta(\alpha, y, t)$ удовлетворяющую

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\alpha|}^t \int_{-D}^D \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + L_1 \vartheta(\alpha, y, t)\phi(\alpha, y, t)\right] dy d\alpha d\tau =\\
&= \int_{|\alpha|}^t \int_{-D}^D S(\tau, y)\phi(\alpha, y, t) dy d\tau, \qquad t \in (0, \mathrm{T}),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\phi(\alpha, y, t) \in C^2(\Omega(\mathrm{T}, D)), \qquad \Omega(\mathrm{T}, D) = \{(\alpha, y, t) : \alpha \in (-\mathrm{T}, \mathrm{T}), y \in (-D, D), |\alpha| < t < \mathrm{T}\}.$

Решение задачи (4) по формуле Даламбера будет

$$\vartheta(\alpha, y, t) = \frac{\varepsilon(0, y)\mu(0, y)h(y)}{2}\delta(t - |\alpha|) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\alpha - t + \tau}^{\alpha + t - \tau} L_1 \vartheta(\xi, y, t) d\xi d\tau.$$

Подставляя значение $L_1(\alpha, y, t)$ в формулу Даламбера и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми сингулярными частями, получим

$$\begin{aligned}
S(t, y) = {} & \frac{h(y)\mu(o, y)\varepsilon(o, y)}{2 \cdot c^2(0, y)} + \frac{1}{2}\int_o^t \left\{\frac{c^2(\tau, y)}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)}\left[\alpha_y S(\tau, y) + \Delta\alpha S(\tau, y)\right] - \right.\\
& \left. - \frac{\sigma(\tau, y)}{\varepsilon(\tau, y)} S(\tau, y)\right\} d\tau, \qquad t \in [0, T], \qquad y \in (-D, D).
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
R(t, y) = {} & \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(\tau, y)\mu(\tau, y)}\left\{S_{yy} - \frac{\mu'_y(\tau, y)}{\mu(\tau, y)} S_y - \frac{\mu'_\tau(\tau, y)}{\mu(\tau, y)}\alpha_y S_y + \right.\\
& \left. + \alpha_y R_y + \Delta\alpha R(\tau, y) - \frac{\sigma(\tau, y)}{\varepsilon(\tau, y)}\right] * R(\tau, y)\Big\} d\tau, \; t \in [0, T], \qquad y \in (-D, D).
\end{aligned} \tag{8}$$

Из равенства $\mathrm{E}(z,y,t)=\vartheta(\alpha(z,y),y,t)$ дифференцируя и приравнивая $z=0$ получим

$$\mathrm{E}(z,y,t)\Big|_{z=0}=\vartheta'_{\alpha}(\alpha(z,y),y,t)\Big|_{\alpha=0}\cdot\alpha'_{z}\Big|_{z=0}=\vartheta'_{\alpha}(\alpha,y,t)\Big|_{\alpha=0}*\alpha'_{z}\Big|_{z=0}=$$

$$=\vartheta'_{\alpha}(\alpha,y,t)\Big|_{\alpha=0}*\frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)}{c^2(0,y)}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t).$$

С другой стороны $\mathrm{E}(z,y,t)\Big|_{z=0}=\left[S'_{z}(0,y)-R(0,y)\right]\theta(t)-S(0,y)\delta(t)+R'_{z}(0,y)\theta_{1}(t).$

Отсюда

$$S(0,y)=h(y),\qquad R(0,y)=S'_{z}(0,y)-r(y),\qquad S'_{z}(0,y)=\frac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2\cdot c^2(x,y)},\qquad R(0,y)=0.$$

Таким образом, функция $r(y)$ не может быть произвольной функцией, она должна быть равна:

$$r(y)=\frac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2\cdot c^2(0,y)}.$$

Теорема единственности. Доказательство теоремы единственности проводим по методике [6].

Введем следующие обозначения и норму

$$\begin{aligned}
\Pi_{11}&=\min_{|\alpha|<T}\ \min_{y\in(-D,D)}\{|\mu(\alpha,y)|,|\varepsilon(\alpha,y)|,|c(\alpha,y)|\},\\
\Pi_{12}&=\max_{|\alpha|<T}\ \max_{y\in(-D,D)}\{|\mu(\alpha,y)|,|\varepsilon(\alpha,y)|,|c(\alpha,y)|\},\\
\Pi_{13}&=\max_{|\alpha|<T}\ \max_{y\in(-D,D)}\{\sigma(\alpha,y)\},\\
\Pi_{14}&=\max_{z\in T}\ \max_{y\in(-D,D)}\{|\alpha_y|,|\Delta\alpha|\},\\
\|\vartheta\|^2(t)&=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\vartheta^2(\alpha,y,t)\,d\alpha\,dy,\quad t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{9}$$

Умножая каждый член уравнения (4) на $2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ и интегрируя по области $\Omega(T,D)$ можно получить оценки $(\Omega(T,D)=\{(\alpha,y,t):\alpha\in(-T,T),\alpha<t<T-\alpha,y\in(-D,D)\})$

$$\begin{aligned}
\|\vartheta\|_1^2(t)\le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)+\frac{2\Pi_{12}^2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\\
+\frac{2\Pi_{12}^2}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_{12}^2\Pi_{14}}{\Pi_{11}^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2(\tau)d\tau,
\end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\|\vartheta\|_1^2(t)=\|\vartheta_t\|^2(t)+\|\vartheta_\alpha\|^2+\frac{\Pi_{12}^2}{\Pi_{11}^2}\|\vartheta_y\|^2(t)+\frac{\Pi_{12}^2\Pi_{14}}{\Pi_{11}}\|\vartheta_\alpha\vartheta_y\|(t).\tag{11}$$

Будем оценивать интеграл

$$\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right\|(\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right\|^{2}+\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right\|^{2}\right](\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_{1}^{2}(\tau)d\tau \cdot \qquad (12)$$

Остальные интегралы, оценивая таким же образом и используя формулу Гроноулла-Беллмана из неравенства (10) получим следующее неравенство

$$\|\vartheta\|_{1}^{2}(t) \le \|\vartheta\|_{1}^{2}(|\alpha|)\cdot \exp\left[\left(4\frac{\Pi_{12}^{2}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{2\Pi_{12}^{2}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right]. \qquad (13)$$

Из последнего неравенства, используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений получим следующее неравенство:

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_{2}^{2}(\tau)\right\} \le \left\{\|\vartheta\|_{2}^{2}|\alpha|\right\} *$$

$$* \exp\left[\left(\frac{5\Pi_{12}^{2}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{3\Pi_{12}^{2}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}\right)t\right], \qquad (14)$$

$$\text{где} \qquad \|\vartheta\|_{2}^{2}(t) = \left(\|\vartheta\|^{2}+\|\vartheta_{t}\|^{2}+\|\vartheta_{\alpha}\|^{2}+\|\vartheta_{y}\|^{2}\right)(t).$$

Таким образом, доказана теорема единственности.

Теорема. Пусть функции $c(\alpha, y), \mu(\alpha, y), \varepsilon(\alpha, y), \sigma(\alpha, y), \alpha_{y}, \Delta\alpha$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка пусть решение задачи (4) существует и принадлежит $C^{2}(\Omega(T, D))$ и выполнено условие (3). Тогда решение задачи (4) единственно в области $\Omega(T, D)$ и имеет оценку

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_{2}^{2}(t)\right\} \le \|\vartheta\|_{2}^{2}(|\alpha|) * \exp(\Pi_{15}t),$$

$$\text{где} \qquad \Pi_{15} = \frac{5\Pi_{12}^{2}\Pi_{14}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{3\Pi_{12}^{2}}{\Pi_{11}^{2}}+\frac{2\Pi_{13}}{\Pi_{11}}. \qquad (15)$$

Из эквивалентности задач (4) и (1)-(2) следует, что решение задачи (1)-(2) также единственно в области $\Omega(T, D)$, при выполнении условия теоремы.

Заключение. В данной статье обосновано одно из условий корректности задачи, единственности решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения.

Литература:

1. Рамский В., Берзан В., Тыршу М. Волновые явления в неоднородных линиях. - Кишинев: Типог. АН РМ, 1997. – С. 296.
2. Тамм И.Э. Основы теории электричества. - М.: Наука, 1989.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
4. Максимычев А.В. физические методы исследования. 2.Сигналы в длинных линиях: Уч.-мет. Пособ. - М.: МФТИ, 2007.
5. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи электродинамики. - М.: Наука, 1991. -С. 304.
6. Сатыбаев А.Дж. Единственность решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей // Междурегиональная научно-техническая конференция “Математическое моделирование и информационные технологии в образованиии науке”, II том. - Алматы, 2003. - С. 383-389.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.Т.