МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATEMATICAL SCIENCE

Алимканов А.А.

БАЧЫМ ЖАНА БОО БУЛАКТУУ СЕЙСМИКАНЫН БИР ЧЕНЕМДҮҮ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН САН УСУЛДУК ЧЕЧИМИ

Алимканов А.А.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

A.A. Alimkanov

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF SEISMIC WITH INSTANT AND GLOBAL PEACE INDEX SOURCES

УДК: 519.876.2

Көрсөтүлгөн булактуулар менен берилген сейсмиканын тескери маселесинин сан усулдук алгоритмдик чечими тургузулган. Бир ченемдүү сейсмиканын тескери маселесинин жакындаштырылган чечиминин так чечимине умтулуусунун теоремасы далилденген. Умтулуунун баасы алынган.

***Негизги сөздөр:** сандык усулу, чечим, бир ченемдүү, тескери маселе, сейсмика, булактар, бат берилүүчү, боо булактуу.*

Построен конечно-разностный алгоритм решения одномерной обратной задачи сейсмики с указанными источниками. Доказана теорема о сходимости приближенного решение одномерной обратной задачи сейсмики к точному решению. Получена оценка сходимости.

***Ключевые слова:** численный метод, решение, одномерная, обратная задача, сейсмика, источники, мгновенный, шнуровой.*

The finite-difference algorithm for solving one-dimensional inverse problem with the specified seismic sources. A theorem on the convergence of approximate solution of one-dimensional seismic inverse problem to the exact solution. The resulting estimate of the convergence.

***Key words:** a numerical method, the solution, of one-dimensional, inverse problem, seismic sources, instant, corded.*

Введение. Задачей сейсморазведки является определение структуры внутреннего пространства Земли по наблюдениям на поверхности Земли.

Сейсморазведка основаны на характеристиках сейсмических волн и скорость распространения сейсмических волн, которые зависят от свойства геологической среды (состав горных пород, пористости, трещиноватости среды, напряжения и температуры среды). С другой стороны геологическая среда характеризуется неравномерным распределением этих свойств (неоднородность, преломление, рефракции, дифракция и поглощение).

В прямых задачах сейсмологии, по заданным известным параметрам среды и по характеру внешнего воздействия – действующего внутри исследуемой системы, необходимо определить поведения среды и систему в целом, например, давления, смещения среды. А сейсмология изучает распространения сейсмических волн в средах Земли.

Обратные задачи сейсмологии – задачи определения параметров среды распространенных волн по характеристикам зарегистрированных колебаний на сейсмограмме. Параметрами среды являются плотность среды, скорость распространения волн в среде, коэффициенты Ламэ и др.

1. Постановка задачи. При линеаризации многомерных, в том числе двумерных задач сейсмики можно получить линеаризованную многомерную (двумерную) обратную задачу и одномерную обратную сейсмики следующего вида (см. [1-4]):

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0(x_3)u''_{0tt}(x_3,t)=\mu_0(x_3)u''_{0x_3x_3}(x_3,t)+\mu'_{x_3}(x_3)u'_{0x_3}(x_3,t),\quad x_3\in R_+, t\in R_+,\\ &u_0(x_3,t)\Big|_{t<0}\equiv 0,\quad \mu_0(x_3)u'_{0x_3}\Big|_{x_3=0}=\left(r_0\delta(t)+h_0\theta(t)\right),\ t\in R_+, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\rho_0(x_3)$ – плотность среды, $\mu_0(x_3)$ - коэффициент Ламе, $u_0(x_3,t)$ – смещения почвы, $\delta(t)$ – дельта - функция Дирака, $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда, r_0, h_0 – положительные постоянные.

Первое условие означает, что среда до времени $t=0$ находится в состоянии покоя, а второе условие означает, что на поверхность Земли действуют мгновенный источник $(\delta(t))$ и шнуровой источник $(\theta(t))$ с силами r_o и h_0 - соответственно.

Прямая задача (1) заключается в определении $u_0(x_3,t)$ - смещении почвы при задании коэффициентов уравнении и источников.

Обратная задача заключается в восстановлении один из коэффициентов уравнении $(\rho_0(x_3), \mu_0(x_3))$ при задании другого коэффициента уравнения, функции источников, а также при задании дополнительной информации о решении прямой задачи вида

$$u_0(x_3,t)\big|_{x_3=0} = f(t), \ \ t\in[0,T]. \tag{2}$$

В нашей работе отыскиваем $\mu_0(x_3)$ – коэффициент Ламэ при известной функции $\rho_0(x_3)$.

Пусть относительно коэффициентов уравнения выполнено условие:

$$\{\mu_0(x_3), \quad \rho_0(x_3)\}\in\Lambda_0, \tag{3}$$

где $\Lambda_0=\left\{\rho_0(x)\in C^6(R_+), \rho_0'(+0)=0,\ 0<M_1\le\rho_0(x)\le M_2, \|\rho_0\|_{C^2}\le M_3\right\}$

при выполнении этого условия (3) решение прямой задачи (1) существует и $u_0(x_3,t)\in C^4(R_+\times R_+)$.

Выпрямления характеристики. Для этого введем новую переменную:

$$x=\int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho_0(\lambda)}{\mu_0(\lambda)}}d\lambda, \ \text{ и новые функции } u(x,t)=u_0(x_3,t),$$

$$C(x)=\sqrt{\mu(x)\Big/\rho(x)}, \ \ \rho(x)=\rho_0(x_3), \ \ \mu(x)=\mu_0(x_3).$$

Тогда из задачи (1) – (2) имеем обратную задачу относительно функции $C(x)$:

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}+\frac{C_x'(x)}{C(x)}u_x(x,t), \qquad (x,t)\in R_+^2, \tag{4}$$

$$u(x,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \qquad C(x)u_x(x,t)\big|_{x=0}=r_0\delta(t)+h_0\theta(t), \qquad t\in R_+,$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=f(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{5}$$

Продолжим теперь функции $C(x)$ и $u(x,t)$ четным образом по переменной x на полупространство $x\in R_-$, $R_-=\{x\in R, \ \ x<0\}$.

Регулярная задача. Приведем обратную задачу (4)-(5) к регулярной задаче, для этого представим решение прямой задачи в виде:

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+S(x)\theta(t-|x|)+R(x)\theta_1(t-|x|), \quad x\in R, \qquad t\in R_+,$$

где $\tilde{u}(x,t)$ - непрерывная функция, $\theta_1(t)=t\cdot\theta(t)$.

Подставляя последнее выражения в (4)-(5) имеем обратную задачу относительно $S(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-2\frac{S_x'(x)}{S(x)}u_x'(x,t), \qquad (x,t)\in\Delta(T),\\ &u(x,t)\big|_{|x|=t}=S(x), \qquad x\in[0,T/2], \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=f(t), \qquad t\in[0,T], \tag{7}$$

где $\Delta(T):\{(x,t)\in(R\times R_+): x\in(0,T/2),\ |x|<t<T-|x|\}.$

Функции *S(x)* и *C(x)* связаны соотношением

$$S(x)=\frac{r_0}{\sqrt{C(0)C(x)}}. \tag{8}$$

Для функции *R(x)* решается задача

$$\left.\begin{aligned} &R'(x)-\frac{C'(x)}{C(x)}S'(x)+\frac{C'(x)}{C(x)}\quad R(x)=0,\\ &R(0)=h_0/C(0)\quad . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2. Конечно-разностное решение.

Теорема. Пусть для $f(t)\in C^4[0,T]$ существует решение обратной задачи (6)-(7) удовлетворяющее условию (3) и пусть решение прямой задачи (6)-(7) $u(x,t)\in C^4(\Delta(t))$. Тогда, при малом *T*, S_i - приближенное решение обратной задачи, построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению обратной задачи (6) – (7) в классе *C* со скоростью порядка *O(h)*.

Повышенное условие $u(x,t),\ f(t)\in C^4[0,T]$ – взято для того, чтобы применит конечно-разностный метод.

Доказательство теоремы проводится по методике, приведенной в работе [4]. Введем сеточную область

$$\Delta_i(T)=\{x_i=ih,\quad t_k=kh,(ih,kh):h=T/2N,\ ih\in(0,T/2),\ i=\overline{1,N},\ ih<kh<T-ih\}, \tag{10}$$

где *h* – сеточный шаг по *x, t*.

Используя обозначение [5], составим разностную схему для обратной задачи (6) – (7)

$$\left.\begin{aligned} &u_{t\bar t}(ih,kh)=u_{xx}(ih,kh)-2\frac{S_{0\bar x}(ih)}{\frac{S_i+S_{i-2}}{2}}\cdot u_0(ih,kh)+O(h),\ (ih,kh)\in\Delta_h(T),\\ &u_i^j=S_i,\ i=\overline{0,N} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$u_0^k=f^k,\ k=\overline{0,2N}. \tag{12}$$

Исследуем в начале сходимости обратной задачи (11)-(12) к точному решению. Для этого распишем разностное уравнение

$$\begin{aligned} &u_{i+1}^k=u_i^{k+1}+u_i^{k-1}-u^k{}_{i-1}+h^2B_i^k,\\ &где\qquad B_i^k=\frac{S_i-S_{i-2}}{h^2}\cdot\frac{4}{S_i+S_{i-2}}\cdot(u_i^k-u_{i-2}^k). \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения

$u_i^{k+1},\quad u_i^{k-1},\quad u_{i-1}^{k-2},\dots$ последовательно, получим

$$u_{i+1}^k=\frac{1}{2}\left[f^{k+i+1}+f^{k-i-1}\right]+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}B_\mu^{k-i-\mu+2p}. \tag{14}$$

Полагая в последнем *k=i+1* и учитывая вторую формулу (11) имеем

$$S_{i+1} = \frac{1}{2}\left[f^{2i+2} + f^{0}\right] + h^{2}\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p}. \qquad (15)$$

Из (14) следуют

$$u_i^k = \frac{1}{2}\left(f^{k+i} + f^{k-i}\right) + h^2 \sum_{p=1}^{i-1}\sum_{\mu=1}^{p} B_k^{k-i-\mu+2p+1}. \qquad (16)$$

$$u_{i-2}^k = \frac{1}{2}(f^{k+i-2} + f^{k-i+2}) + h^2 \sum_{p=1}^{i-3}\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+3}. \qquad (17)$$

Откуда

$$\frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} = \frac{1}{2h}\left(f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} - f^{k-i+2}\right) + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{k-i+\mu+1} + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{k+i-\mu-1}, \qquad (18)$$

а из (16) и (17) следуют

$$S_i = \frac{1}{2}\left[f^{2i} + f^{0}\right] + h^2 \sum_{p=1}^{i-1}\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p}, \qquad (19)$$

$$S_{i-2} = \frac{1}{2}\left[f^{2i-4} + f^{0}\right] + h^2 \sum_{p=1}^{i-3}\sum_{\mu=1}^{p} B_{\mu}^{1-\mu+2p}. \qquad (20)$$

Следовательно,

$$\frac{S_i - S_{i-2}}{h} = \frac{1}{2h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{2i-\mu-1} + h\sum_{\mu=1}^{i-3} B_{\mu}^{2i-\mu-3}. \qquad (21)$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f^{k+i} + f^{k-i} \\ \frac{1}{h}\left(f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}\right) \\ f^{2i} + f^{0} \\ \frac{1}{h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$\Phi_i^k = \begin{pmatrix} u_i^k \\ \frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} \\ S_i \\ \frac{S_i - S_{i-2}}{h} \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

и введем операторное выражение

$$A\left[\Phi_p^k\right] = \begin{pmatrix} h\sum_{\mu=1}^{p} B_\mu^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h\sum_{\mu=1}^{p} B_\mu^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} - B_o^{2i-3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Тогда из (16), (18), (19), (21) следует

$$\Phi_i^k = F_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k\right]. \tag{25}$$

Точно такое же можно получить и для $\widetilde{\Phi}_i^k : \widetilde{\Phi}_i^k = \widetilde{F}_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\widetilde{\Phi}_p^k\right]$, где вместо u_i^k, S_i записываются $\widetilde{u}_i^k, \widetilde{S}_i$.

Из последней формулы и (25) имеем

$$\left| \Phi_i^k - \widetilde{\Phi}_i^k \right|_C \le \left| F_i^k - \widetilde{F}_i^k \right|_C + h\left| \sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k - \widetilde{\Phi}_p^k\right] \right|_C$$

Введем обозначения $\Delta_i = \max(\Phi_i^k - \widetilde{\Phi}_i^k), \delta_i = \max(F_i^k - \widetilde{F}_i^k)$, $k = i....2N - i$,

Используя дискретный аналог Гронуолла - Беллмана, имеем

$$\max_{0\le i\le N} \left| \Delta_i \right|_C \le \left| \delta_i \right|_C * \exp\{h \left| A[\Delta_i] \right|_C$$

Доказано утверждение теоремы.

По формуле (8) находим неизвестную C_i (решение обратной задачи (4)-(5)): $C_i = \dfrac{r_0^2}{C_0 \cdot S_i^2}$, $i = \overline{0, N}$.

Переходя к старой переменной находим μ_i (решение обратной задачи (1)-(2)): $\mu_i = c_i$, $i = \overline{0, N}$.

Вывод. В данной работе найдено конечно-разностное решение обратной задачи сейсмики в указанных условиях. Доказана теорема о сходимости приближенного решение к точному решению обратной задачи при малом *T*.

Литература:

1. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. - М.: Научный Мир, 2004. - С. 304.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - С. 457.
3. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. -ьНовосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. - С. 304.
4. Сатыбаев А.Дж. Численное определение коэффициента Ламэ в уравнении сейсмики // История, культура и экономика, наука юга Кыргызстана. – Ош: КУУ, 2000. - С. 148-152.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.Т.