Байгесеков А.М.

ЭКИ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРР-СТИЛТЬЕСТИН СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ДАРАЖАЛУУ АБСОЛЮТТУК СУММАЛАНУУСУ

Байгесеков А.М.

СТЕПЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

A.M. Baigesekov

THE EXSTENT ABSOLUTE SUMMABILITY OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA-STIELTJES OF THE SECOND KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

УДК: 517. 968

Бул жумушта өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгүнүн негизинде, теңдемелерди өзгөртүү методу жана терс эмес квадраттык формалар методу менен эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу сымал Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын чексиз сектордо абсолюттук жана квадраттык суммалануусунун жетиштүү шарттары алынды.

***Негизги сөздөр**: өсүүчү функция боюнча туунду, эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу сымал Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемеси, чыгарылыштын абсолюттук суммалануусу, чыгарылыштын квадраттык суммалануусу.*

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции, и методом преобразования уравнений и методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными.

***Ключевые слова:** производная по возрастающей функции, слабо нелинейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными, абсолютная суммируемость решения, квадратичная суммируемость решения.*

In this paper, on the basis of the notion of a derivative with an increasing function, by the method of transformation of equations and the method of quadratic forms sufficient conditions are established for the absolute and quadratic summability of solutions of weakly nonlinear integral equation of Volterra-Stieltjes of the second kind with two independent variables.

***Key words:** derivative is an increasing function, weakly nonlinear integral equation of Volterra-Stieltjes with two independent variables, absolute summability of solution, square summability of solution.*

Рассмотрим слабо нелинейное интегральное уравнения Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными вида:

$$m(t,x)u(t,x)+\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)=f(t,x)+F(t,x,u), \qquad (1)$$

где $(t,x)\in G=\{(t,x): o\le t<\infty,\ o\le x<\infty\}$, $(t,x,u)\in G_1=G\times R$, $m(t,x)$, $a(t,x,s), b(t,x,y)$, $f(t,x)$ - известные функции, причем $m(t,x)>0$, $u(t,x)$ - неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$; $F(t,x,u)$ – известная функция, удовлетворяющая в области G_1 следующего условия слабой нелинейности:

$$|F(t,x,u)|\le g(t,x)|u| \qquad (F)$$

с неотрицательной $g(t,x)$.

Отметим, что множитель $m(t,x)$ в уравнении (1) появляется, если обе части рассматриваемого уравнения вида (1) с $m(t,x)\equiv 1$ умножить на любую весовую функцию $m(t,x)\neq 0$ тождественно. Следовательно, функция $m(t,x)$ в уравнение (1) выполняет роль весовой функции.

В данной работе, используя метод, примененный в статье [1], установливаются достаточные условия абсолютной и квадратичной суммируемостии решениий уравнения (1) в области G.

Напомним, что в статье [2] дано понятие производной по возрастающей функции:

Определение [2]. Производной по $\varphi(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta\varphi(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{\varphi(x)}(x)=\frac{df(x)}{d\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}.$$

Под $u(t,x)\in L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p>0)$ понимается :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |u(t,x)|^p\,d\,\varphi(t)\,d\psi(x)<\infty \qquad (p>0).$$

Тогда при $p=1$ $\Rightarrow$ абсолютная суммируемость решения $u(t,x)$ на бесконечном секторе G, а при $p=2$ $\Rightarrow$ квадратичная суммируемость решения $u(t,x)$ на бесконечном секторе G.

Предположим выполнение следующих условий:

A) Функции $a(t,x,s)$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,s)$ и $a''_{\varphi(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{s})}(t,x,s)-$ непрерывны в области G_1, где $G_1=\{(t,x,s):o\le s\le t<\infty, o\le x<\infty\}$, $a(t,x,o)\ge 0$ и $a'_{\varphi(t)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $a'_{\varphi(s)}(t,x,s)\ge 0$ и $a''_{\varphi(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{s})}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$.

B) Функции $b(t,x,y)$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)$ и $b''_{\psi(\mathrm{x})\psi(\mathrm{y})}(t,x,y)$ - непрерывны в области $G_2=\{(t,x,y):o\le t<\infty, o\le y\le x<\infty\}$, $b(t,x,o)\ge 0$ и $b'_{\psi(x)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)\ge 0$ и $b''_{\psi(\mathrm{x})\psi(\mathrm{y})}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия 1) A) , B) ; 2) (F);

3) $m(t,x)>0$, $\dfrac{f(t,x)}{\sqrt{m(t,x)}}\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$; 4) $\Delta(t,x)\equiv m(t,x)-2g(t,x)\ge\Delta_0>0$ (соответственно $\Delta(t,x)>0$, $(\Delta(t,x))^{-1}\in L^1_{\varphi,\psi}(G)$). Тогда любое решение уравнения (1) принадлежит пространству $L^2_{\varphi,\psi}$ (G) (соответственно пространству $L^1_{\varphi,\psi}$ (G)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t,x)$ - решение уравнения (1). Тогда уравнение (1) умножаем на $u(t,x)$ и интегрируем по области $G_{tx}=\{(s,y):0\le s\le t,\,0\le y\le x\}$, $(t,x)\in G$, и получим тождество: $\int_0^t\int_0^x m(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)\equiv\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x F(s,y,u(s,y))u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (2)$$

Преобразуем второй и третий интегралы левой части (2) по формуле интегрирования по частям и применением формулы Дирихле. Сначала преобразуем второй интеграл

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s a(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau)\right]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x a(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,o)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,0)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(s)d\psi(y)d\varphi(\tau).$$

Отсюда применив формулу Дирихле, окончательно имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,0)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3)$$

Аналогичным образом для третьего интеграла левой части тождества (2) получим соотношение

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^t b(s,x,0)\left(\int_0^x u(s,v)d\varphi(v)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s b'_{\psi(y)}(s,y,o)\left(\int_0^y u(s,v)d\varphi(v)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x b'_{\psi(z)}(s,x,z)\left(\int_z^x u(s,v)d\varphi(v)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,v)d\varphi(v)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (4)$$

Подставляя преобразования (3), (4) в (2), учитывая условия 1), 2) теоремы, имеем

$$2\int_0^t\int_0^x m(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\le 2\int_0^t\int_0^x |f(s,y)||u(s,y)|d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+2\int_0^t\int_0^x g(s,y)u^2(s,y)\,d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (5)$$

Теперь проделаем следующее преобразование, выделением полного квадрата:

$$m(s,y)(u(s,y))^2-2|f(s,y)||u(s,y)|=m(s,y)\left[(u(s,y))^2-2\frac{|f(s,y)||u(s,y)|}{m(s,y)}+\frac{f^2(s,y)}{m^2(s,y)}-\frac{f^2(s,y)}{m^2(s,y)}\right]=$$

$$=m(s,y)\left[|u(s,y)|-\frac{|f(s,y)|}{m(s,y)}\right]^2-\frac{f^2(s,y)}{m(s,y)}. \qquad (6)$$

Отсюда с учетом преобразования (6), будем получать неравенство:

$$\int_0^t\int_0^x \Delta(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x m(s,y)\left[|u(s,y)|-\frac{|f(s,y)|}{m(s,y)}\right]^2 d\psi(y)d\varphi(s)\le$$

$$\leq \int_0^t \int_0^x \frac{f^2(s,y)}{m(s,y)} d\psi(y) d\varphi(s). \tag{7}$$

Из (7) в силу условия 3) теоремы имеем

$$\int_0^t \int_0^x \Delta(s,y) u^2(s,y) d\psi(y) d\varphi(s) \leq f_0, \tag{8}$$

где $f_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f^2(s,y)}{m(s,y)} d\psi(y) d\varphi(s) < \infty.$

Из (8) на основании первого из условий 4) теоремы вытекает

$$\Delta_0 \int_0^t \int_0^x u^2(s,y) d\psi(y) d\varphi(s) \leq f_0, \text{ что означает } u(t,x) \in L^2_{\varphi,\psi}(G).$$

Второе из утверждений теоремы, т.е. $u(t,x) \in L^1_{\varphi,\psi}(G)$, вытекает из следующего соотношения:

$$|u(t,x)| = |u(t,x)| (\Delta(t,x))^{\frac{1}{2}} (\Delta(t,x))^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\left[\Delta(t,x) u^2(t,x) + (\Delta(t,x))^{-1}\right]$$

интегрированием по области G, аналогично теореме 2 [3], с учетом второго из условий 4) теоремы. Теорема полностью доказана.

ПРИМЕР. Для интегрального уравнения

$$e^{t+x} u(t,x) + \int_0^t e^{-t+x+s} u(s,x) d\varphi(s) + \int_0^x e^{t^2-x^2+y^2} u(t,y) d\psi(y) = t - x - \frac{\sin e^{t+x} u}{2(1+u^2)},$$

где $(t,x) \in G = [0;\infty) \times [0;\infty)$, $\varphi(t) = \sqrt{t}, \psi(x) = \sqrt{x}$, выполняются все условия теоремы, здесь $m(t,x) = e^{t+x}$, $a(t,x,s) = e^{-t+x+s}$, $b(t,x,y) = e^{t^2-x^2+y^2}$, $g(t,x) = \frac{1}{2} e^{t+x}$, $\Delta_0 = \frac{1}{2}$,

$$(\Delta(t,x))^{-1} = 2 e^{-t-x} \in L^1_{\varphi,\psi}(G), \quad \frac{f^2(t,x)}{m(t,x)} = (t-x)^2 e^{-t-x} \in L^1_{\varphi,\psi}(G).$$

Также А) $a(t,x,0) = e^{-t+x} \geq 0$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,0) = -2\sqrt{t}\, e^{-t+x} \leq 0$,

$a'_{\varphi(s)}(t,x,s) = 2\sqrt{s}\, e^{-t+x+s} \geq 0$, $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s) = -4\sqrt{ts}\, e^{-t+x+s} \leq 0$;

В) $b(t,x,0) = e^{t^2-x^2} \geq 0$, $b'_{\psi(x)}(t,x,0) = -4x\sqrt{x}\, e^{t^2-x^2} \leq 0$,

$b'_{\psi(y)}(t,x,y) = 4y\sqrt{y}\, e^{t^2-x^2+y^2} \geq 0$, $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y) = -16xy\sqrt{xy}\, e^{t^2-x^2+y^2} \leq 0$.

Следовательно, любое решение этого уравнение $u(t,x) \in L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p = 1,2)$.

Отметим, что идея установления условий А), В) заимствована из статьи [4].

Литература:

1. Асанов А. Единственность решения операторных уравнений Вольтерра // Изв. АН Кирг. ССР. - 1988. - №11. - С. 58-61.
2. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции//Табигый илимдер журн. - Б.: КТУ «Манас», 2001. - №1. - С.18-78.
3. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим,1984. - Вып. 17. - С. 166-174.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. Квадратичная интегрируемость решения линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода на бесконечной области // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып. 42. - С.57-63.

Рецензент: д.ф.-м.н. Байзаков А.Б.