Айтбаев К.А.

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖАНА АНЫН СТРУКТУРАСЫ

Айтбаев К.А.

РАЗРЕШИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ И ЕЕ СТРУКТУРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

K.A. Aitbaev

THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM SOLUTIONS AND ITS STRUCTURE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE FOURTH ORDER

УДК: 513.83

Чыгарылышты өзгөртүп түзүү методун колдонуп төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденген жана чыгарылыштардын структуралары түзүлгөн.

Негизги сөздөр: *Айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер, Коши маселесинин чыгарымдуулугу, Липшиц шарттары, кысып чагылтуу принциби, Вольтерра интегралдык теңдемелери.*

Исследована разрешимость решений задачи Коши и ее структура для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка методом преобразования решений.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения в частных производных, разрешимость задачи Коши, условия Липшица, принцип сжатых отображений, интегральные уравнения Вольтерра.*

Solvability of the Cauchy problem solutions and its structure for nonlinear differential equations in partial derivatives of the fourth order method transformations of solutions.

Key words: *differential equations in partial derivatives, solvability of the Cauchy problem, Lipschitz, the contraction mapping principle, Volterra integral equations.*

В работе исследована разрешимость решений задачи Коши и ее структура для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, развит метод преобразования решений, предложенный в [1-3]. Сутью предложенного метода является преобразование решений исходной задачи Коши к эквивалентному ей нелинейному интегральному уравнению Вольтерра, к которой применяется принцип сжатых отображений. Построение оператора преобразования существенно зависит от структуры решений каждого конкретного преобразуемого уравнения или класса уравнений. Кроме того, в этом методе непосредственно получается интегральное представление решений начальной задачи.

Рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных четвертого порядка

$$u_{xxxt}+u_{xxx}+3\beta u_{xxt}+3\beta u_{xx}+\left(3\beta^2+1\right)u_{xt}+\beta(\beta^2+2)u_t+\left(3\beta^2+\alpha\right)u_x+$$
$$+\beta\left(\beta^2+\alpha+1\right)u=f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{2}$$

где $\alpha,\beta\in R_+$.

Решение начальной задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos(x-\nu)\right]Q(\nu,s)\,d\nu ds, \tag{3}$$

где $c(t,x)\in\overline{C}^{(1,3)}([0,T]\times R)$ - известная функция, такая, что $c(0,x)=\varphi(x)$, $Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, подлежащая определению.

Пусть

$$H\left(t,c(t,x)\right)=c_{xxxt}\left(t,x\right)+c_{xxx}\left(t,x\right)+3\beta c_{xxt}\left(t,x\right)+\beta(\beta^2+2)c_t\left(t,x\right)+$$
$$+\left(3\beta^2+1\right)c_{xt}\left(t,x\right)+3\beta c_{xx}\left(t,x\right)+\left(3\beta^2+\alpha\right)c_x\left(t,x\right)+\beta\left(\beta^2+\alpha+1\right)c\left(t,x\right).$$

П р е д п о л о ж е н и е (А). Пусть

$$f(t,x,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\big|_u\right),\ H(t,x)\in\bar{C}^{(1,3)}([0,T]\times R),$$
$$\frac{2L}{\alpha\beta}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}<1.$$

Далее, для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставлять (3) в уравнение (1). С этой целью из (3) последовательно находим нижеследующие соотношения

$$u_x(t,x)=c_x(t,x)-\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos\left(x-\nu\right)\right]Q(\nu,s)d\nu ds+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds, \tag{4}$$

отсюда, с учетом (3), имеем

$$u_x=c_x(t,x)-\beta(u-c)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds. \tag{5}$$

Дифференцируя обе части соотношения (5) по t, получаем

$$u_{xt}=c_{xt}-\beta(u_t-c_t)+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,t)d\nu-$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds.$$

Отсюда, с учетом (5), имеем

$$u_{xt}=c_{xt}-\beta(u_t-c_t)-\alpha\left[u_x-c_x+\beta(u-c)\right]+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,t)d\nu. \tag{6}$$

Дифференцируя обе части соотношения (5) по x, получаем

$$u_{xx}=c_{xx}-\beta(u_x-c_x)-\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\cos\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds.$$

Или, с учетом (5), имеем

$$u_{xx}=c_{xx}-\beta(u_x-c_x)-\beta\left[u_x-c_x+\beta(u-c)\right]+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\cos\left(x-\nu\right)Q(\nu,s)d\nu ds. \tag{7}$$

Далее, дифференцируя (7) по x, получаем

$$u_{xxx}=c_{xxx}-\beta(u_{xx}-c_{xx})-\beta\left[u_{xx}-c_{xx}+\beta(u_x-c_x)\right]+$$
$$+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds-\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\cos(x-\nu)Q(\nu,s)d\nu ds- \quad (8)$$
$$-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(\nu,s)d\nu ds.$$

С учетом (5), (7) из (8) имеем

$$u_{xxx}=c_{xxx}-\beta(u_{xx}-c_{xx})-\beta\left[u_{xx}-c_{xx}+\beta(u_x-c_x)\right]+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds-$$
$$-\beta\left\{u_{xx}-c_{xx}+\beta(u_x-c_x)+\beta\left[u_x-c_x+\beta(u-c)\right]\right\}-\left[u_x-c_x+\beta(u-c)\right]. \quad (9)$$

Дифференцируя обе части (9) по t, получаем

$$u_{xxxt}=c_{xxxt}-\beta(u_{xxt}-c_{xxt})-\beta\left[u_{xxt}-c_{xxt}+\beta(u_{xt}-c_{xt})\right]+$$
$$+Q(t,x)-\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds- \quad (10)$$
$$-\beta\left\{u_{xxt}-c_{xxt}+\beta(u_{xt}-c_{xt})+\beta\left[u_{xt}-c_{xt}+\beta(u_t-c_t)\right]\right\}-\left[u_{xt}-c_{xt}+\beta(u_t-c_t)\right].$$

Из (10) группируя одинаковые члены, имеем

$$u_{xxxt}+3\beta u_{xxt}+3\beta^2u_{xt}+\beta(\beta^2+1)u_t=c_{xxxt}+3\beta c_{xxt}+3\beta^2c_{xt}+\beta(\beta^2+1)c_t+$$
$$+Q(t,x)-\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds. \quad (11)$$

Сложив получено (6), (9), (11), получаем

$$u_{xxxt}+u_{xxx}+3\beta u_{xxt}+3\beta u_{xx}+\left(3\beta^2+1\right)u_{xt}+\beta(\beta^2+2)u_t+\left(3\beta^2+\alpha\right)u_x+$$
$$+\beta\left(\beta+\alpha+1\right)u=H\left(t,c(t,x)\right)+Q\left(t,x\right)- \quad (12)$$
$$-\left(\alpha-1\right)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(\nu,t)d\nu.$$

Тогда из (1), учитывая (3), (12), имеем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$Q(t,x)=f\left[t,x,c\left(t,x\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos\left(x-\nu\right)\right]Q(\nu,s)d\nu ds\right]-$$
$$-H(t,c(t,x))+\left(\alpha-1\right)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds-\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\sin\left(x-\nu\right)Q(\nu,t)d\nu\equiv P\left[Q\right]. \quad (13)$$

К нелинейному уравнению (13) будем применять принцип сжатых отображений [4]. Правую часть (13) рассмотрим как оператор PQ, действующий на $Q\left(t,x\right)$.

Рассмотрим множество непрерывных функций

$$Q\left(t,x\right)=\left\{Q\left(t,x\right):Q\left(t,x\right)\in C\left(\left[0,T_0\right]\times R\right)\cap\left\|Q\left(t,x\right)\right\|\le h\right\},$$

где T_0 и h будут определены ниже.

Тогда из (13) имеем

$$\|PQ\| \le \left\| f\left(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos(x-\nu)\right]Q(\nu,s)d\nu ds\right)\right\| +$$

$$+\|H(t,x)\| + \frac{\alpha-1}{\alpha}\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds\right\| + \left\|\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(\nu,t)d\nu\right\| \le$$

$$\le M+N+\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}\right]h,$$

где $M=\max\limits_Q\|f(t,x,u)\|, \quad N=\max\limits_Q\|H(t,x)\|.$

Используя предположение (А), выберем α,β,T_0,h так, чтобы

$$M+N+\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}\right]h \le h.$$

Тогда оператор $PQ:\ Q\to Q$.

Покажем теперь, что оператор PQ является оператором сжатия. Из (13), используя предположение (А), имеем

$$\|PQ_1-PQ_2\| \le \left\{2L\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}d\nu ds+\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}\right]\right\}\|Q_1-Q_2\| \le$$
$$\le\left[\frac{2L}{\alpha\beta}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}\right]\|Q_1-Q_2\|. \tag{14}$$

В силу предположения (А) из (14) следует, что оператор PQ есть оператор сжатия на множестве Q. По принципу сжатых отображений следует, что нелинейное интегральное уравнение (13) имеет единственное непрерывное решение $Q(t,x)\in Q$. Подставив найденную функцию в (3) получим решение исходной задачи Коши (1)-(2). Очевидно, условие (2) выполняется в силу подбора функции $c(t,x)$.

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений задачи Коши (1)-(2). Для всех Q из (3) следует неравенство

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos(x-\nu)\right]Q(\nu,s)d\nu ds\right\| \le$$

$$\le c_0+\frac{2h}{\alpha\beta}=M_0=const.$$

Из (5) имеем

$$\|u_x(t,x)+\beta u(t,x)\| \le \beta\|c(t,x)\|+\|c_x(t,x)\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(\nu,s)d\nu ds\right\| \le \beta c_0+c_1+\frac{h}{\alpha\beta}=M_1=const.$$

$$\left\| u_{xt} + \beta u_t + \alpha u_x + \beta u \right\| \le \left\| c_{xt} + \beta c_t + \alpha c_x + \beta c \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\nu)} \sin\left(x-\nu\right) Q(\nu,t) d\nu \right\| \le$$

$$\le \left\| c_{xt}\left(x,t\right) \right\| + \beta \left\| c_t\left(x,t\right) \right\| + \alpha \left\| c_x\left(x,t\right) \right\| + \beta \left\| c\left(x,t\right) \right\| + \frac{h}{\beta} = M_2 = const.$$

Аналогично, из (7), (9), (10) можно доказать, что все производные входящие в уравнение (1) равномерно ограничены.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. Пусть выполнено предположение (А). Тогда задача Коши (1)-(2) имеет решение $u(t,x) \in \bar{C}^{(1,3)}([0,T_0] \times R)$, которое представимо в виде (3).

Литература:

1. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О разрешимости начальной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник КНУ им.Ж.Баласагына. Сер. 3. - 2010. –Т.13, Вып. 4. - С. 13-19.
2. Imanaliev M.I., Baizakov A.B., Imanaliev T.M. Problem of Cauchy for the singularly perturbed systems of the integro-differential equations with the turn point// Repots of the third Congress of the World mathematical Society of Turkic countries. Almaty, 2009. -Vol.1. – P. 296-301.
3. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Айтбаев К.А. Об одном методе решения задачи коши для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып.42. - С. 6-10.
4. Колмогоров А.Н., Фомин.С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972. - 544 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Аблабеков Б.С.