Толубаев Ж.О., Байгесеков А.М., Балтабаев А.Г.

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА АЛЫНГАН ТУУНДУНУН ЖАРДАМЫНДА ЭКСТРЕМУМДАРДЫ ИЗИЛДӨӨ

Толубаев Ж.О., Байгесеков А.М., Балтабаев А.Г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ ЧЕРЕЗ ВОЗРАСТАЮЩУЮ ФУНКЦИЮ

Zh.O. Tolubaev, A.M. Baigesekov, A.G. Baltabaev

THE STUDY OF EXTREMA USING DERIVATIVES, OBTAINED VIA THE INCREASING FUNCTION

УДК: 517. 968

Бул макалада өсүүчү функция боюнча алынган туундунун жардамында функциянын экстремумдарын изилдөө изилденди.
***Негизги сөздөр:** изилдөө, экстремум, функция, теория, формула, теорема.*

В этой работе рассмотрено исследование на основе понятия производной по возрастающей функции экстремума функции.
***Ключевые слова:** исследование, экстремум, функция, теория, формула, теорема.*

In this paper we consider the study on the basis of the concept of derivative increasing function extremum.
***Key words:** research, extremum, function, theory, formula, theorem.*

Жогорку жана атайын орто окуу жайлардын математика сабагы боюнча негизги курстарында негизинен бир аргументүү функциянын туундуларынын аныкталыштарын, алардын касиеттерин, аларды табуунун негизги жолдорун, алардын колдонуштарын жана алардын жардамында функциянын экстремумдарын изилдөө жөнүндөгү негизги теоремалар далилдөөлөрү менен толук изилденет.

Ал эми алардын жардамында функциянын экстремумдарын изилдөө боюнча мисалдарды жана маселелерди чыгарууда колдонулуштары практикалык сабактарда каралган [6].

Бул макалада функциянын өсүүчү функция боюнча алынган туундусунун жардамында функциянын экстремумдарын изилдөө жана аларды колдонуунун негизги усулдары каралат [1].

Ал үчүн биз мурдатан белгилүү болгон түшүнүктөрдү кеңейтилген түрдө аныктап алабыз.

Аныктама-1. $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча алынган биринчи туундусу 0 гө барабар болгон x чекитинин маанилери, ал функциянын стационардык чекиттери деп аталат.

Башкача айтканда $f'_\varphi(x)=0$ (1) барабардыгын канаатандырган x тин маанилери стационардык чекиттери болуп эсептелет. $[a,b]$ интервалында $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү $f(x)$ функциясынын кемибөөчү функция болуусу үчүн $f'_\varphi(x)\geq 0$ (2) шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү болот. $[a,b]$ интервалында $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү $f(x)$ функциясынын кемүүчү функция болуусу үчүн $f'_\varphi(x)\leq 0$ (3) шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү. $[a,b]$ интервалында $f(x)$ функциясы өсүүчү болуусу үчүн $f'_\varphi(x)>0$ (4) шартын аткарылышы жетиштүү болот. Функциянын экстремумдары үчүн жалпы математика курсунда далилденген төмөнкү теоремаларды кеңейтилген түрдө далилдеп көрсөтөлү.

1-теорема. Бизге x_0 стационардык чекитинин аймагында $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү функция болсун, анда

1. Эгерде x_0 чекитинин сол жагында $f'_\varphi(x)>0$ жана оң жагында $f'_\varphi(x)<0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык максимуму болот;
2. Эгерде x_0 чекитинин сол жагында $f'_\varphi(x)<0$ жана оң жагында $f'_\varphi(x)>0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык минимуму болот;
3. Эгерде x_0 чекитинин оң жана сол жактарында $f'_\varphi(x)$ функциясынын белгиси бирдей болсо, анда бул чекитте функция экстремумга ээ болбойт.

Далилдөө. Теореманын 1) шартын далилдөө үчүн кеңейтилген Лагранжанын теоремасынын формуласын колдонобуз, анда

$f(x)=f(x_0)+f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$ формуласынын негизинде c чекити $[x_0,x]$ интервалына тийешелүү болгондуктан теореманын шартынан $f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$ экендиги келип чыгат, мындан $f(x)<f(x_0)$ экендиги келип чыгат. Теореманын 2) шартын далилдөө үчүн о.э. кеңейтилген Лагранжанын теоремасынын формуласын колдонуп, анда $f(x)=f(x_0)+f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$ формуласынын негизинде c чекити $[x_0,x]$ интервалына тийешелүү болгондуктан теореманын шартынан $f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))>0$ экендиги келип чыгат, мындан $f(x)>f(x_0)$ экендиги келип чыгат. Ал эми теореманын 3) шартын далилдөө үчүн биз эгерде x_0 чекитинин оң жана сол жактарында $f'_\varphi(x)>0$ деп алсак, анда сол жагында $f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$, ал эми оң жагында $f'_\varphi(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))>0$ болот. Мындан $x_1<x_0<x_2$ үчүн $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ экендиги келип чыгат.

Теорема далилденди.

2-теорема. Бизге $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагында үзгүлтүксүз жана $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун.

Эгерде $f'_\varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде солдон оңго өткөн учурда белгисин "$+$" тан "-" ка өзгөртсө, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдык максимумга, ал эми белгисин "-" тан "$+$" ка өзгөртсө, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдык минимумга ээ болот. Ал эми белгисин өзгөртпөсө, анда локалдык экстремум жок. Теореманын далилдөөсү биринчи теореманын далилдөөсүнөн келип чыгат.

3-теорема. Мейли бизге $[a,b]$ интервалында $f'_\varphi(x_0)=0$ болсун жана $f''_\varphi(x_0)$ туундусу жашасын, анда

1. Эгерде $f''_\varphi(x_0)<0$ болсо, анда x_0 функциянын локалдык максимум чекити болот.
2. Эгерде $f''_\varphi(x)>0$ болсо, анда x_0 функциянын локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө: 1) $f''_\varphi(x_0)<0$ болгондуктан, $f'_\varphi(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде кемийт жана $f'_\varphi(x_0)=0$ болгондуктан $f'_\varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинен сол жактан оң жакка өткөндө белгисин "$+$" тан "-" ка өзгөртсө, анда 2-теореманын негизинде x_0 чекити локалдык максимуму болот.

2) $f''_\varphi(x)>0$ болгондуктан, $f'_\varphi(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде өсөт жана

2-теореманын негизинде x_0 чекити локалдык минимуму болот.

Теорема далилденди.

4-теорема. Мейли бизге

$$f'_{\varphi(x)}(x_0)=\cdots=f_{\varphi(x)}{}^{(2k-1)}(x_0)=0, \qquad f_{\varphi(x)}{}^{(2k)}(x_0)\neq 0$$

болсун, анда:

1. эгерде $f_\varphi^{(2k)}(x_0)<0$ болгондо x_0-чекити $f(x)$ функциясынын локалдык максимум чекити;
2. эгерде $f_\varphi^{(2k)}(x_0)>0$ болгондо x_0-чекити $f(x)$ функциясынын локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө: Теореманын 1) шартын далилдөө $k=1$ болгон учурда 3-теоремадан келип чыгат, ал эми $k>1$ үчүн $f'_\varphi(x)$ туундусун кеңейтилген Тейлордун формуласы боюнча төмөндөгүдөй түрдө жазып алабыз:

$$f'_{\varphi}(x)=f'_{\varphi}(x_0)+\frac{f''_{\varphi}(x_0)}{1!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))+\cdots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-3}+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}.$$ м

ындан $f'_{\varphi}(x)=\frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}$ келип чыгат. $f_{\varphi}^{(2k)}(x_0)\prec 0$ болгондуктан $f_{\varphi}^{(2k-1)}(x)$ функциясы кемийт, ошондуктан $f_{\varphi}^{(2k-1)}(x)$ функциясы x_0 чекити аркылуу өткөндө белгисин “$+$” тан “-” ка өзгөртөт.Теорема далилденди.

Адабияттар:

1. Асанов А. Производная функции по возразтающей функции // Табигый илимдер журналы. - Б., 1998.
2. Илин В.А, Садовничий В.А, Сендов Б.Х. Математический анализ. Т. I, II, III. - М.: МГУ, 1985.
3. Рудин У. Основы математического анализа. - М., 1976.
4. Борубаев А., Бараталиев К. Математикалык анализ. - Б., 2009.
5. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр. - Ф., 1969.
6. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С. Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы. - Б., 2005.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Кошуев А.Ж.