Бекешов Т.О.

ВОЛЬТЕРРАНЫН 1-ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫНЫН ЧЕЧИМИ

Бекешов Т.О.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 1-РОДА

Bekeshov T.O.

THE SOLUTION TO ONE CLASS OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA 1-KIND

УДК: 517,95

Көпчүлүк прикладдык маселелерди моделдештирүү сызыктуу эмес тендемелерге алып келинет. Интегралдоонун эки чеги тең өзгөрмөлүү болгон сызыктуу эмес теңдемелер өзгөчө көңүл буруууга арзыйт. Бул макалада үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндигинде Вольтерранын 1-түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин чечимдеринин жалгыздыгы жана регуляризациясы изилденет.

***Негизги создор**: сызыктуу эмес теңдеме, интегралдоонун өзгөрмө чеги, үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги, чечимдердин жалгыздыгы, регуляризация.*

Моделирование многих прикладных задач сводится к нелинейным уравнениям. Нелинейные интегральные с двумя переменными пределами интегрирования уравнения представляют особый интерес. В данной работе исследуются вопросы регуляризации и единственности решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра 1-рода в пространстве непрерывных функций.

***Ключевые слова:** нелинейные уравнения, переменные пределы интегрирования, пространство непрерывных функций, единственность решения, регуляризация.*

Рассмотрим $\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s,u(s))ds = f(t); \qquad t\epsilon[t_0;T]$ (1)

где $\alpha(t) \in C[t_0,t]$; $\alpha(t_0)=t_0; \alpha(t) \le t$, $f(t)$ и $K(t,s,u(s))$ –заданные функции на отрезке $[t_0,t]$ и в области G=$\{(t,s)$: $t_0 \le t \le T$, $\alpha(t) \le s \le t\}$;
$u(t)$ –искомая функция на отрезке $[t_0,t]$

Моделирование многих прикладных задач сводится к нелинейным уравнениям. Нелинейные интегральные с двумя переменными пределами интегрирования уравнения представляют особый интерес. В данной работе исследуются вопросы регуляризации и единственности решения уравнения (1) в пространстве непрерывных функций.

Пусть $K(t,s,u(s)) = K_0(t,s)u(s) + K_1(t.s,u(s))$

Тогда уравнение (1) можно представить

$\int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)u(s)ds + \int_{\alpha(t}^{t} K_1(t.s,u(s))ds = f(t); \qquad t\epsilon[t_0;T]$ (2) едующих условий:

1^0. $\alpha(t) \in C[t_0;T]$; $\alpha(t_0)=t_0$; $\alpha'(t)>0$; *при* $t\epsilon[t_0;T]$

2^0. *При фиксированном* $t\epsilon[t_0;T]$ $K_0(t,s) \in L_1[t_0;T]$ и $K_0(t,t)>0$ при почти всех $t\epsilon[t_0;T]$

3^0. $\forall\, t,\tau$ $(\tau<t)$, *при всех* $(t,s);(\tau,s) \in G$

$|K_0(t,\tau) - K_0(s,\tau)| \le l_1(s)\int_{\tau}^{t} K_0(s,s)\,ds$

где $l_1(t) \in L_1[t_0;T]$ и $l_1(t)>0$ при $t\epsilon[t_0;T]$;

4^0. $\forall\, t,s$ $(s<t)$ и $\forall\, u_1,u_2$ $(u_1,u_2 \in C[t_0;T])$ *и при всех* (t,τ,u_1) и $(t,\tau,u_2) \in G\times R$ $|K_1(t,\tau,u_2) - K_1(s,\tau,u_2) - K_1(t,\tau,u_1) + K_1(s,\tau,u_1)| \le l_2(s)\int_{s}^{t} K_0(\tau,\tau)d\tau\,|u_2-u_1|$;

Кроме того $K_1(t,t,u) \equiv 0$ при $t\epsilon[t_0;T]$ и $u(t) \in C[t_0;T]$

Наряду с уравнением (2) рассмотрим

$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)v(s,\varepsilon)ds + \int_{\alpha(t)}^{t} K_1(t.s,v(s,\varepsilon))ds = f(t) + \varepsilon u(t_0); t\epsilon[t_0;T]$ (3)

$0<\varepsilon<1$ - некоторый малый параметр, $u(t)$- решение уравнения (1)

Его решение будем искать в виде

$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon)$; (4)

Где $u(t)$ - решение уравнения (2), а $\xi(t,\varepsilon)$ – неизвестная фукнция

Подставляя (4) из (3) получим

$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\int_{\alpha(t)}^{t}[K_1(t.s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)) - K_1(t.s,u(s))]ds$ -
$-\varepsilon[u(t) - u(t_0)]; \qquad t\epsilon[t_0;T]$

В результате несложных преобразований последнее сведем к виду

$$\xi(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K_0(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\mathrm{K}_0(\mathrm{t,s}) - K_0(s,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)} K_0(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\mathrm{K}_1(\mathrm{t.s,u(s)} + \xi(s,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t.s,u(s)})]\mathrm{ds} -$$
$$-[u(t) - u(t_0)]; \qquad t\epsilon[t_0;T] \qquad (5)$$

Используя резольвенту $\mathrm{R}(\mathrm{t,s},\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}$

ядра $-\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)$ и считая правую часть известным, решение (5) можно представить в следующем виде

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\mathrm{K}_0(\mathrm{t,s}) - K_0(s,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)} K_0(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\mathrm{K}_1(\mathrm{t.s,u(s)} + \xi(s,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t.s,u(s)})]\mathrm{ds} - [u(t) - u(t_0)]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_0(t,\tau) - K_0(s,\tau)]\,\xi(\tau,\varepsilon)\mathrm{d\tau\,ds} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_0(t,\tau) - K_0(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)\mathrm{d\tau\,ds} -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\alpha(s)} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,K_0(\tau,\tau)\,\xi(\tau,\varepsilon)\mathrm{d\tau\,ds} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t.\tau,u(\tau)})]\mathrm{d\tau\,ds} -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{s.\tau,u(\tau)} + \xi(\tau,\varepsilon))]\mathrm{d\tau\,ds} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau) - \mathrm{K}_1(\mathrm{s.\tau,u(\tau)})]\mathrm{d\tau\,ds} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K_0(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(s) - u(t_0)]\,ds; \qquad t\epsilon[t_0;T] \qquad (6)$$

Вычислим двойные интегралы, при этом воспользуемся формулой Дирихле и будем иметь ввиду, что

$$d_s\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau\right) = \frac{1}{\varepsilon}K(s,s)ds$$

Тогда из (6) получится

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{\alpha(t)} N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau +$$
$$+\int_{\alpha(t)}^{t} N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + U(t,\varepsilon); \qquad t\epsilon[t_0;T] \qquad (7)$$

где $H_0(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}K_0(t,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K_0(s,s)ds}$ (8)

$$H_1(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[\mathrm{K}_0(t,\tau) - K_0(\tau,\tau)] -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} \mathrm{K}_0(\mathrm{s,s})\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[\mathrm{K}_0(t,\tau) - K_0(s,\tau)]\,ds; \qquad (9)$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[\mathrm{K}_0(t,\tau) - K_0(\tau,\tau)] - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{t} \mathrm{K}_0(\mathrm{s,s})\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[\mathrm{K}_0(t,\tau) - K_0(s,\tau)]\,ds; \quad (10)$$

$$\mathrm{N}_0(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K_0(s,s)ds}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t.\tau,u(\tau)})]; \qquad (11)$$

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t}.\tau,\mathrm{u}(\tau))] -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})\; e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(s.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$-\mathrm{K}_1(\mathrm{t}.\tau,\mathrm{u}(\tau)) + \mathrm{K}_1(\mathrm{s}.\tau,\mathrm{u}(\tau))]\,\mathrm{ds}; \qquad (12)$$

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(\mathrm{t}.\tau,\mathrm{u}(\tau))] -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{t} \mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})\; e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[\mathrm{K}_1(t.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - \mathrm{K}_1(s.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$-\mathrm{K}_1(\mathrm{t}.\tau,\mathrm{u}(\tau)) + \mathrm{K}_1(\mathrm{s}.\tau,\mathrm{u}(\tau))]\,\mathrm{ds}; \qquad (13)$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{t},\varepsilon) = -[\,\mathrm{u}(\mathrm{t}) - \mathrm{u}(\mathrm{t}_0)]\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})\mathrm{ds}} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} K_0(s,s)\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]\,ds;$$
(14)

Далее обратим внимание к следующим утверждениям.

Лемма 1. Пусть выполняются условия $1^0 - 2^0$. Тогда для функции $H_0(t,\tau,\varepsilon)$ определенной по формуле (8) имеет место

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau \le \gamma_0 > 0; \qquad t\epsilon[\,t_0;T] \qquad (15)$$

где $\gamma_0 = \sup\limits_{\substack{t\in[t_0,T]\\ \tau\in[\alpha\{t\},T]}} \frac{|\mathrm{K}_0(\mathrm{t},\tau)|\,\alpha'(\alpha^{-1}(\tau))}{|\mathrm{K}_0(\alpha^{-1}(\tau),\alpha^{-1}(\tau))|}$

Доказательство: Согласно свойству взаимообратных функций $(\alpha^{-1}(\alpha(t))' = \frac{1}{(\alpha^{-1}(\mathrm{t}))'}$;

Тогда $d_\tau(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(s,s)ds) = \frac{1}{\varepsilon} K_0(\alpha^{-1}(\tau),\ \alpha^{-1}(\tau))(\alpha^{-1}(\tau))'\,\mathrm{d}\tau$

Принимая во внимание эти соотношения и с учетом условий леммы получится требуемая оценка.

Лемма 2. Пусть $\mathrm{H}_1(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)$ и $\mathrm{H}_2(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)$ определены по формулам (9), (10) соответственно. Кроме того выполняются условия $1^0 - 3^0$

Тогда справедливы оценки

$|\mathrm{H}_1(t,\tau,\varepsilon)| \le l_1(\tau)\,(1+\mathrm{e}^{-1})$ *при* $(t,\tau)\in G_1 = \{t_0 \le t,\tau \le T\}$; (16)

$|\mathrm{H}_2(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)| \le l_1(\tau)$ *при* $(t,\tau)\in G_1 = \{t_0 \le t,\tau \le T\}$; (17)

Доказательство: Докажем (16).

Переходя к оценке в (9), учитывая условия 2^0 и 3^0 имеем

$$|\mathrm{H}_1(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}\, l_1(\tau)\int_\tau^t \mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})\mathrm{ds} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \{\mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})\; e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\, l_1(\tau)\int_s^t \mathrm{K}_0(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\}\mathrm{ds};$$

Имея ввиду $d_s\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau\right) = \frac{1}{\varepsilon} K(s,s)ds$ повторный интеграл перепишем

$$l_1(\tau)\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \{(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mathrm{K}_0(\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\}\mathrm{ds})\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s}))\}ds$$

и воспользовавшись формулой интегрирования по частям получаем требуемую оценку.

Аналогично доказывается вторая оценка.

Лемма 3. Пусть выполняются условия $1^0, 2^0\ и\ 4^0$ и функции $\mathrm{N}_0(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, $\mathrm{N}_1(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ и $\mathrm{N}_2(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ определены соответственно формулами (11), (12) и (13). Тогда имеют места следующие неравенства

$$|\mathrm{N}_0(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \mathrm{l}_2(\tau)\, e^{-1}\,|\xi(\tau,\varepsilon)|; \qquad (18)$$

$$|\mathrm{N}_1(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \mathrm{l}_2(\tau)(1+2\,e^{-1})|\xi(\tau,\varepsilon)|; \qquad (19)$$

$$|\mathrm{N}_2(\mathrm{t},\tau,\mathrm{u}(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \mathrm{l}_2(\tau)(1+2\,e^{-1})|\xi(\tau,\varepsilon)|; \qquad (20)$$

Доказательство: Если переходить к оценке в (11), (12) и (13) соответственно с учетом условий леммы, заметив Sup $(\eta e^{-\eta}) = 1$ получаем требуемые оценки.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $1^0 - 4^0$ и уравнение (1) имеет решение в пространстве $C\,[t_0;T]$ непрерывных функций. Тогда решение уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C\,[t_0;T]$ к решению u(t) и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\| \le \frac{\delta_1(\varepsilon)}{1-\beta_2};$$

где $\delta_1(\varepsilon) = C_0(\varepsilon)e^{(4+6e^{-1})L} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ $\beta_2 = \gamma_0 e^{(4+6e^{-1})L} < 1$

Доказательство: Если переходить к оценке, то в силу лемм 1-3 из (7) имеем

$$|\xi(\tau,\varepsilon)| \le \gamma_0\|\xi(\tau,\varepsilon)\| + (1+e^{-1})\int_{t_0}^{\alpha(t)} l_1(\tau)\,|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} l_1(\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+e^{-1}\int_{t_0}^{\alpha(t)} l_2(\tau)\,|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + (1+2e^{-1})\int_{t_0}^{\alpha(t)} l_2(\tau)\,|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+(1+2e^{-1})\int_{t_0}^{\alpha(t)} l_2(\tau)\,|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + |U(t,\varepsilon)|; \qquad t\epsilon[\,t_0\,;T]$$

или

$$|\xi(\tau,\varepsilon)| \le \gamma_0\|\xi(\tau,\varepsilon)\| + \int_{t_0}^{t}[(2+e^{-1})l_1(\tau) + (2+5e^{-1})l_2(\tau)]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \|U(t,\varepsilon)\|_C;$$

В работе [6] для функции $U(t,\varepsilon)$ определенной по формуле (14), если $u(t) \in C\,[t_0;T]$, $K_0(t,t) \in L_1[\,t_0\,;T]$, $K_0(t,t) > 0$ при почти всех $t\epsilon[\,t_0\,;T]$ и $(t) = \int_{t_0}^{t} K_0\,(s,s)\,ds$, $t\epsilon[\,t_0\,;T]$, установлена оценка

$$\|U\,(t,\varepsilon)\| \le 3\|u(t)\|_C\, e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^{\beta}) = C_0(\varepsilon); \tag{21}$$

где $\beta -$ число из $(0\,,1)$

$\omega_u(\delta) = Sup\,\left|u\big(\varphi^{-1}(x)\big) - u\big(\varphi^{-1}(\nu)\big)\right|;$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция функции $\varphi(t)$;

Тогда в силу неравенства Гроноулла- Бельмана [8] с учетом оценки (21) из последнего неравенства имеем

$$|\xi(\tau,\varepsilon)| \le [\gamma_0\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C + C_0(\varepsilon)]e^{\int_{t_0}^{t}[(2+e^{-1})l_1(\tau)+(2+5e^{-1})l_2(\tau)]d\tau} \tag{22}$$

Пусть $L = \max\left\{\int_{t_0}^{T} l_1(\tau)d\tau,\ \int_{t_0}^{T} l_2(\tau)d\tau,\right\}$ и $\beta_2 = \gamma_0 e^{(4+6e^{-1})L} < 1$

Тогда из неравенства (22) следует

$$\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C \le \frac{\delta_1(\varepsilon)}{1-\beta_2};$$

где $\delta_1(\varepsilon) = C_0(\varepsilon)e^{(4+6e^{-1})L} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$

Теорема 2. Пусть выполняются условия $1^0 - 4^0$. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве непрерывных функций.

Доказательство: Пусть уравнение (1) имеет два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ при фиксированном $f(t)$; $t\epsilon[\,t_0\,;T]$

Сначала покажем, что $u_1(t_0) = u_2(t_0)$

В самом деле, из (2) имеем

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)[u_1(s) - u_2(s)]ds + \int_{\alpha(t)}^{t}[K_1\big(t.s,u_1(s)\big) - K_1\big(t.s,u_2(s)\big)]ds = 0;$$

Последнее преобразуем к следующему виду

$$[u_1(t_0)-u_2(t_0))]\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)\,ds=-\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)[u_1(s)-u_1(t_0)]ds+$$

$$+\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)[u_2(s)-u_2(t_0)]ds-\int_{\alpha(t)}^{t}[K_0(t,s)-K_0(s,s)]\big(u_1(s)-u_2(s)\big)ds-$$

$$\int_{\alpha(t)}^{t}[K_1\big(t,s,u_2(s)\big)-K_1\big(s,s,u_2(s)\big)-K_1\big(t,s,u_1(s)\big)+K_1\big(s,s,u_1(s)\big)]\,ds;$$

В силу условий 1^0-4^0, отсюда имеем

$$|u_1(t_0)-u_2(t_0))|\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)\,ds\le\sup_{t\in[t_0:T]}|u_1(t)-u_1(t_0)|\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)\,ds+$$

$$+\sup_{t\in[t_0:T]}|u_2(t)-u_2(t_0)|\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(s,s)\,ds+\|u_1(t)\|_C\int_{\alpha(t)}^{t}l_1(s)\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)\,d\tau\,ds+$$

$+\|u_2(t)\|_C\int_{\alpha(t)}^{t}l_1(s)\int_s^t K_0(\tau,\tau)\,d\tau\,ds+\int_{\alpha(t)}^{t}l_2(s)\int_s^t K_0(\tau,\tau)\,d\tau|u_1(s)-u_2(s)|\,ds$; Поскольку $\int_s^t K_0(\tau,\tau)\,d\tau\le\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(\tau,\tau)\,d\tau$ и пологая $\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(\tau,\tau)\,d\tau>0$ делим последнего неравенства на $\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(\tau,\tau)\,d\tau$. Тогда, если переходить к пределу при $t\to t_0$, то получится $u_1(t_0)=u_2(t_0)$.

Далее уравнение (3), которое является уравнением второго рода, имеет единственное решение *v(t,ε)* в пространстве непрерывных функций на $t\epsilon[\,t_0\,;T]$, и в силу теоремы 1 его можно представить в виде

$v(t,\varepsilon)=u_1(t)+\xi_1(t,\varepsilon)$ и $v(t,\varepsilon)=u_2(t)+\xi_2(t,\varepsilon)$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ –два решения уравнения (1) при фиксированном $f(t)$.

Тогда, ясно $|u_1(t)-u_2(t)|\le|\xi_1(t,\varepsilon)|+|\xi_2(t,\varepsilon)|$

Поскольку $|\xi_1(t,\varepsilon)|\to 0$ и $|\xi_2(t,\varepsilon)|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$,

то $u_1(t)\equiv u_2(t)\ \ \forall t\in[t_0;T]$;

Литература:

1. Асанов А., Бекешов Т. О. Единственность решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными //Мат-лы Междунар. Конф. «Актуальные проблемы математики и математические моделирования экологических систем», Алматы, окт. 1996 –Алматы, 1996;
2. Асанов А., Бекешов Т. О. Об одном классе систем интегральных нелинейных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными // Исслед. по интегро-дифф. Уравнениям – Б.: Илим 1997, -Вып.26, -С.101-108;
3. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I – рода: Теория и численные методы – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999.-193С;
4. Апарцин А. С., Караулова И. В., Маркова Е. В., Труфанов В. В. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество, 2005, -№ 10 - С. 69-75;
5. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем – М: Наука, 1983 -350С.;
6. Иманалиев М. И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра I- рода // Исслед. по интегро-дифф. Уравнениям – Ф.: Илим 1988, -Вып.21, -С.3-38;
7. Лаврентьев М. М,, Романов В. Г., Шишатский С. Р. Некорректные задачи математической физики и анализа – М: Наука, 1980;
8. Мартынюк А. А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения – Киев: Наук Думка, 1979;
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач – М:Наука 1979. -288 С.

Рецензент: д.пед.н., профессор Син Е.Е.