МАТЕМАТИКА

С. Искандаров, А.М. Байгесеков

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ АСИМПТОТИКАЛЫК КАСИЕТТЕРИ ЖӨНҮНДӨ

С. Искандаров, А.М. Байгесеков

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

S. Iskandarov, A.M. Baigesekov

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR VOLTERRA - STIELTJES INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER ON THE HALF

УДК: 517.968.74

Сызыктуу сымал экинчи тартиптеги Вольтерра-Стилтьес интегро-дифференциалдык теңдемесинин каалаган чыгарылышынын жана анын биринчи туундусунун жарым октогу чектелгендигинин жетиштүү шарттары алынат. Бул теңдеменин каалаган чыгарылышынын биринчи туундусунун баалоосу, абсолюттук жана квадраттык интегралданышы, нөлгө умтулушу да изилденет. Интегралдоо жүргүзүлүүчү өсүүчү функциянын туундусу кээ бир чекиттерде үзүлүүчү болуу учуру каралат. Салмактык жана кесүүчү функциялар методу өнүктүрүлөт. Стилтьес интегралын кармаган интегралдык барабарсыздыктар методу колдонулат. Иллюстративдик мисал тургузулат.

***Негизги сөздөр**: Вольтерра - Стилтьес интегро-дифференциалдык теңдемеси, чектелгендик, биринчи туундуну баалоо, абсолюттук интегралданыш, квадраттык интегралданыш, салмактык функция, кесүүчү функция, Вольтерра - Стилтьес интегралдык барабарсыздыгы.*

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра - Стилтьеса. Также изучается оценка, абсолютной и квадратичной интегрируемости, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения. Рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках. Развивается метод весовых и срезывающих функций. Применяется метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса. Строится иллюстративный пример.

***Ключевые слова**: Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра - Стилтьеса, ограниченность, оценка первой производной, абсолютная интегрируемость, квадратичная интегрируемость, весовая функция, срезывающая функция, интегральное неравенство Вольтерра-Стилтьеса.*

We establish sufficient conditions for on boundedness the half of any solution and its first derivative weakly nonlinear integral-differential equation of the second order Volterra - Stieltjes. Also studied estimate, absolute and quadratic integrability, convergence to zero of the first derivative of any solution of this equation. We consider the case when the derivative increasing function for which integration is carried out, may be discontinuous at some points. Developed method of weighting and cutting functions. Used method of integral inequalities with Stieltjes integral. Construct an illustrative example.

***Key words:** Integro-differential equation of Volterra - Stieltjes, boundedness , estimate of the first derivative, absolutely integrable, square integrable, the weighting function, the cutting function , integral inequality Volterra-Stieltjes.*

Все фигурирующие ниже функции от $t, (t,\tau), x, y, z$ являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$, $|x|, |y|, |z| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУВС - интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J решений и их первых производных, оценки, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p = 1,2)$, стремления к нулю при $t \to \infty$ первых производных решений ИДУВС второго порядка вида

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau) = f(t) +$$

$$+ F_2\left(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} H_2(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))dq(\tau)\right), \quad t \ge t_0, \qquad (1)$$

где $g(t)$, $q(t)$- возрастающие функции и $dg(t), dq(t)$ понимаются в смысле определения из $[1]$, функции $F_2(t,x,y,z)$, $H_2(t,\tau,x,y)$ удовлетворяют по x, y, z следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F_2(t,x,y,z)| \le l_0(t)|x| + l_1(t)|y| + l_2(t)|z|, \quad |H_2(t,\tau,x,y)| \le h_0(t,\tau)|x| + h_1(t,\tau)|y| \qquad (F_2, H_2)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l_k(t), h_\nu(t,\tau)$ $(k = 0,1,2;\ \nu = 0,1)$.

Поставленная нами задача, насколько нам известно, ранее не изучена. Заметим, что в статье $[2]$ для линейного ИДУВС вида (1) (в (1) $F_2(t,x,y,z) \equiv 0$) получены достаточные условия $x'(t) \in L_g^2(J,R)$ в случае $f(t) \in L_g^2(J,R)$.

Как и в $[1,2]$, у нас: $x'(t) \in L_g^p(J,R) \Leftrightarrow \int\limits_{t_0}^{\infty} |x'(t)|^p\, dg(t) < \infty \quad (p = 1,2)$,

$\Leftrightarrow$ -знак равносильности.

Пусть $[3,4]$: $0 < \varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \qquad (K) \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1 \ldots n)$- некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv \varphi(t) K_i(t,\tau) (\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t) (\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1 \ldots n);$$

$c_i(t)$ $(i = 1 \ldots n)$-некоторые функции.

Аналогично $[1,2]$ имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} x''(s)\varphi(s)x'(s)dg(s) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dx'(s)}{ds}\varphi(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}x'(s)dg(s) = \int\limits_{t_0}^{t} g'(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x'(s))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}g'(t)\varphi(t)(x'(t))^2 - \frac{1}{2}g'(t_0)\varphi(t_0)(x'(t_0))^2 - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{dg(s)}[g'(s)\varphi(s)](x'(s))^2 dg(s), \tag{2}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} b(s)x(s)\varphi(s)x'(s)dg(s) = \int\limits_{t_0}^{t} b(s)\varphi(s)x(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}\frac{dx(s)}{ds}dg(s) = \int\limits_{t_0}^{t} g'(s)b(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}g'(t)b(t)\varphi(t)(x(t))^2 - \frac{1}{2}g'(t_0)b(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2 - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{dg(s)}[g'(s)b(s)\varphi(s)](x(s))^2 dg(s). \tag{3}$$

Следуя работам $[2-6]$, с учетом условий (K), (f), получаем следующие соотношения:

$$2\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)x'(s)\left[\int\limits_{t_0}^{s} K(s,\tau)x'(\tau)dg(\tau)\right]dg(s) = 2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x'(s)\psi_i(s)x'(\tau)dg(\tau)dg(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2 - \int\limits_{t_0}^{t} R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2 dg(s) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{t} R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 dg(\tau) - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2 dg(\tau)dg(s)\right], \tag{4}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\varphi(s)x'(s)dg(s) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t} E_i(s)\,\psi_i(s)x'(s)dg(s) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[E_i(t)X_i(t,t_0)-\int_{t_0}^{t}E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)dg(s)\right], \tag{5}$$

$$\int_{t_0}^{t}c'_{ig(s)}dg(s)=c_i(t)-c_i(t_0)\quad (i=1...n), \tag{6}$$

где $\quad X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)dg(\eta)\qquad (i=1...n)$,

по определениям из $[1]$:

$$R'_{ig(t)}(t,\tau)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_i(t+\Delta t,\tau)-R_i(t,\tau)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

$$R'_{ig(\tau)}(t,\tau)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_i(t,\tau+\Delta\tau)-R_i(t,\tau)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

$$R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)=\frac{\partial R_{ig(t)}(t,\tau)}{\partial g(\tau)}=\frac{\partial R_{ig(\tau)}(t,\tau)}{\partial g(t)}=R''_{ig(\tau)g(t)}(t,\tau)\qquad (i=1...n),$$

$$E'_{ig(t)}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E_i(t+\Delta t)-E_i(t)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

$$c'_{ig(t)}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c_i(t+\Delta t)-c_i(t)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

(по нашему предположению о том, что все фигурирующие функции являются непрерывными, эти пределы и соотношения справедливы).

Далее будем следовать работам $[3-6]$. Для любого фиксированного решения $x(t)$ ИДУВС (1) умножаем $\varphi(t)x'(t)$, интегрируем по возрастающей функции $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (f), функции $R_i(t,\tau),\ E_i(t),\ c_i(t)\quad (i=1...n)$, используем (2)-(6) и условие (F_2,H_2). В результате будем иметь следующее неравенство:

$$g'(t)\varphi(t)(x'(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)+g'(t)b(t)\varphi(t)(x(t))^2-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)b(s)\varphi(s)](x(s))^2dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)\Big\}\le c_*+$$
$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)|x'(s)|\Big\{l_0(s)|x(s)|+l_1(s)|x'(s)|+\int_{t_0}^{s}\left[G_0(s,\tau)|x(\tau)|+G_1(s,\tau)|x'(\tau)|\right]dq(\tau)\Big\}dg(s), \tag{7}$$

где $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]$, $c_*=g'(t_0)\varphi(t_0)(x'(t_0))^2+g'(t_0)b(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)$, $G_k(t,\tau)\equiv l_2(t)h_k(t,\tau)\quad (k=0,1)$.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $g(t),q(t)$ - возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F_2,H_2), $(K),(f)$;

2) существует функция $\beta(t)>0$ такая, что $g'(t)\varphi(t)\ge\beta(t)$;

3) $\Delta(t)\ge 0$; 4) $g'(t)b(t)\varphi(t)\ge b_0>0$, $\dfrac{d}{dg(t)}\left[g'(t)b(t)\varphi(t)\right]\le 0$;

5) $R_i(t,t_0)\ge 0$, $R'_{ig(t)}(t,t_0)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $\left(E_i(t)\right)^2\le R_i(t,t_0)c_i(t)$, $\left(E'_{ig(t)}(t)\right)^2\le R'_{ig(t)}(t,t_0)c'_{ig(t)}(t)$ $\quad (i=1...n)$;

6) $R'_{ig(\tau)}(t,\tau)\ge 0$, $\quad R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)\le 0 \quad (i=1...n)$;

7) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\left\{l_0(s)+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}+\int_{t_0}^{t}\left[G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right]dq(\tau)\right\}dg(s)<\infty.$

Тогда для любого решения $x(t)\in C^2(J,R)$ с любым начальными данными $x^k(t_0)$ $(k=0,1)$ верны следующие утверждения:

$$x(t)=O(1), \tag{8}$$

$$x'(t)=(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \tag{9}$$

$$\Delta(t)(x'(t))^2\in L^1_{g(t)}(J,R). \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что условие 5) теоремы означает, что

$$R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)\ge 0 \quad (i=1...n).$$

На основании этого в силу условий 1) -4), 6) из неравенства (7) приходим к следующему интегральному неравенству:

$$0\le u(t)\equiv\beta(t)(x'(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)+b_0(x(t))^2\le c_*+$$
$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}}\left\{b_0^{-\frac{1}{2}}l_0(s)(u(s))^{\frac{1}{2}}+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{s}\left[b_0^{-\frac{1}{2}}G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right](u(\tau))^{\frac{1}{2}}dq(\tau)\right\}dg(s)\ . \tag{11}$$

Разрешая интегральное неравенство (11), аналогично лемме 3 из [7] и учитывая условие 7) теоремы, имеем

$$u(t)\le c_*\exp\left(2\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\left\{b_0^{-\frac{1}{2}}l_0(s)+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{t_0}^{s}\left[b_0^{-\frac{1}{2}}G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right]dq(\tau)\right\}dg(s)\right)\equiv c_{**}<\infty\ . \tag{12}$$

Из $u(t)\ge 0$ и (12) следует, что $\beta(t)(x'(t))^2\le u(t)\le c_{**}$,

$$|x'(t)|\le(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}\sqrt{c_{**}}, \tag{13}$$

$$\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)\le u(t)\le c_{**}, \tag{14}$$

$$b_0(x(t))^2\le c_{**}\Rightarrow|x(t)|\le b_0^{-\frac{1}{2}}\sqrt{c_{**}}. \tag{15}$$

Следовательно, из (15), (13), (14) вытекают утверждения (8), (9), (10) теоремы соответственно. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы приходим к следующим следствиям.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются все условия теоремы и $\beta(t) \geq \beta_0 > 0$, то любое решение $x(t)$ и его первая производная $x'(t)$ ИДУВС (1) ограничены на J.

Первое утверждение сразу получается из (8), а второе утверждение - из (9).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются все условия теоремы и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t) = \infty$, то первая производная любого решения $x(t)$ ИДУВС (1) стремится к нулю при $t \to \infty$, т.е. $x'(t) \to 0,\ t \to \infty$.

Это следует из (9).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполняются все условия теоремы и $\Delta(t) > 0,\ (\Delta(t))^{-1} \in L_g^1(J, R_+ / \{0\})$ (соответственно $\Delta(t) \geq \Delta_0 > 0$), то для любого решения $x(t)$ ИДУВС (1) его первая производная $x'(t) \in L_g^1(J, R)$ (соответственно $x'(t) \in L_g^2(J, R)$).

Первое утверждение этого следствия аналогично теореме 2 [8] вытекает из неравенства

$$|x'(t)| \equiv |x'(t)|(\Delta(t))^{\frac{1}{2}}(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\left[\Delta(t)(x'(t))^2 + (\Delta(t))^{-1}\right]$$

интегрирование на $[t_0, t]$ по функции $g(t)$ и с учетом (10). Второе утверждение непосредственно имеем из (10).

ПРИМЕР. Для ИДУВС

$$x''(t) + \left(t^4 + 1 + (t+3)\sqrt[3]{t^2}\right)x'(t) + \frac{3}{(t+3)^2}x(t) +$$

$$+\int_0^t \left\{\frac{e^{9(t+\tau)}\sin\sqrt[3]{t^2}\sin\sqrt[3]{\tau^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{\tau} + 5\right)} + e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}\sqrt[3]{\tau^2}(\tau+3)^2\right\}x'(\tau)d\sqrt[3]{\tau} =$$

$$= \frac{e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t}+2\right)} - e^{\sqrt{t}} + e^{-5t}x\sin x - \frac{|x'|x'}{(|x'|+1)(t+6)^{10}} +$$

$$+\int_0^t \left[\frac{e^{-t-\tau}x^3(\tau)}{x^2+1} - \frac{e^{-2t}|x'(\tau)|^5\cos x'(\tau)}{\left[(x'(\tau))^4 + 7\right](t+\tau+1)}\right]d\sqrt{\tau}, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствий 1-3 при $\varphi(t) \equiv \sqrt[3]{t^2}(t+3)^2$, здесь $t_0 = 0,\ g(t) = \sqrt[3]{t}$,

$$g'(t)\varphi(t) = \frac{1}{3}(t+3)^2 \equiv \beta(t), \qquad \frac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)] \equiv 2(t+3)\sqrt[3]{t^2}, \qquad \Delta(t) \equiv 2(t^4+1), \qquad n = 2,$$

$$\psi_1(t) \equiv e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2},\quad \psi_2(t) \equiv \sqrt[3]{t^2}(t+3)^2 e^{\sqrt{t}},\quad R_1(t,\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{\tau} + 5},\quad E_1(t) \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{t}+2},\quad c_1(t) \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{t}+5},$$

$$R_2(t,\tau) \equiv 1,\ E_2(t) \equiv c_2(t) \equiv 1,\ l_0(t) \equiv e^{-5t},\ l_1(t) \equiv \frac{1}{(t+6)^{10}},\ l_2(t) \equiv 1,\quad h_0(t,\tau) \equiv e^{-t-\tau},\ h_1(t,\tau) \equiv \frac{e^{-2t}}{t+\tau+1}.$$

Таким образом, мы нашли класс ИДУВС вида (1), для которого выше поставленная задача, решаема.

Литература:

1. *Асанов А.* Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. – Бишкек: Кыргызско-Турецкий университет «Манас», 2001. – С. 18-64.
2. *Асанов А., Толубаев Ж.О.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2013. – №4. – С. 75-81.
3. *Искандаров С.* Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1980. – Вып. 13. – С. 149-184.
4. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. –216 с.

5. *Искандаров С.* Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры //Дифференц. уравнения. – М.,2008. – Т.44, №7. – С.883 -895.
6. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра:Автореф. дисс…докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 С.
7. *Искандаров С.* О леммах с интегралом Стилтьеса и их применении к изучению асимптотических свойств решений Вольтерровых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып.28. –С.64-74.
8. *Искандаров С.* Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1984. – Вып. 17. – С. 161-165.

Рецензент: д.ф.-м.н. Темиров Б.К.