МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Байгазиева Н.А.

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН БИР КАСИЕТИ ЖӨНҮНДӨ

Байгазиева Н.А.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

N.A. Baigazieva

ON ONE PROPERTIES OF UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

Бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндиктер изилденген.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу мейкиндик, бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндик, чектүү аддитивдүү жабдуу.*

Исследованы равномерно τ - финально паракомпактные пространства.

Ключевые слова: *равномерное пространство, равномерно τ - финально паракомпактное пространство, конечно аддитивное покрытие.*

There are a uniform τ - Lindelof paracompact space where are studied.

Key words: *uniform space, uniform τ - Lindelof paracompact space, finitely-additive covering.*

В данной статье все равномерные пространства предполагаются отделимыми, топологические пространства тихоновскими, а отображения равномерно непрерывными.

Пусть (X,U) равномерное пространство. Для покрытия α равномерного пространства (X,U), положим $\alpha^{\angle} = \{\cup\alpha_0 : \alpha_0 \subset \alpha, \alpha_0 - \text{конечное}\}$. Покрытие α называется конечно аддитивным, если $\alpha^{\angle} = \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно τ - финально паракомпактным, если в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать локально конечное равномерное покрытие мощности $\le \tau$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если (X,U) равномерно τ - финально паракомпактное пространство, то топологическое пространство (X,τ_U) является τ - финально паракомпактным. Обратно, если (X,τ) является τ -финально паракомпактным топологическим пространством, то равномерное пространство (X,U_X) , где U_X - универсальная равномерность, является равномерно τ - финально паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ_U). Тогда для конечно аддитивного открытого покрытия $\alpha^{\angle}$ равномерного пространства (X,U) существует вписанное в него локально конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\le \tau$. Известно, что внутренность $\langle\beta\rangle$ равномерного покрытия β является равномерным покрытием. Положим $\gamma = \langle\beta\rangle$. Ясно, что γ - открытое локально конечное равномерное покрытие пространства (X,U). Для каждого $\Gamma \in \gamma$ выберем $A_\Gamma \in \alpha^{\angle}$ так, что $\Gamma \subset A_\Gamma$, где $A_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \alpha$, $i = 1,2,...,n$. Положим $\alpha_0 = \cup\{\alpha_\Gamma : \Gamma \in \gamma\}$, $\alpha_\Gamma = \{\Gamma \cap A_i : i = 1,2,...,n\}$. Тогда α_0 является открытым локально конечным покрытием пространства (X,τ_U) мощности $\le\tau$, вписанным в открытое покрытие α. Итак, пространство (X,τ_U) τ-финально паракомпактно.

Обратно, пусть пространство (X,τ) является τ - финально паракомпактным. Известно, что множество всех открытых покрытий образует базу универсальной равномерности U_X пространства (X,τ). Пусть α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U_X). Тогда существует вписанное в него локально конечное открытое покрытие β мощности $\le\tau$. Ясно, что $\beta\in U$. Следовательно, равномерное пространство (X,U_X) является равномерно τ - финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X,U) - равномерное пространство, bX - произвольное компактное расширение. Для того, чтобы равномерное пространство (X,U) было равномерно τ-финально паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K\subset bX\setminus X$ существовало такое локально конечное равномерное покрытие $\alpha\in U$ мощности $\le\tau$, что $[A]_{bX}\cap K=\varnothing$ для любого $A\in\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - равномерно τ - финально паракомпактное пространство и $K\subset bX\setminus X$ - произвольный компакт. Тогда для каждой точки $x\in X$ существует такая открытая в bX окрестность O_x, что $[O_x]_{bX}\cap K=\varnothing$. Ясно, что $\gamma=\{O_x\cap X : x\in X\}$ - открытое покрытие пространства (X,U). Образуем открытое покрытие $\gamma^{\angle}$ пространства (X,U), взяв в качестве элементов γ. Тогда $\gamma^{\angle}$ - конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). В покрытие $\gamma^{\angle}$ по условию теоремы можно вписать локально конечное равномерное покрытие $\beta\in U$, мощности $\le\tau$. Тогда $[B]_{bX}\subset[\bigcup\limits_{i=1}^{n}(O_{x_i}\cap X)]_{bX}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}[O_{x_i}]_{bX}$. Так как $[O_{x_i}]_{bX}\cap K=\varnothing$ для любого $i=1,2,...,n$, то $[B]_{bX}\cap K=\varnothing$ для любого $B\in\beta$.

Достаточность. Пусть α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда найдется такое открытое семейство β в bX, что $\beta\wedge\{X\}=\alpha$. Положим $K=bX\setminus\cup\beta$. Отсюда имеем, что K - компакт. Существует такое локально конечное равномерное покрытие $\gamma\in U$ мощности $\le\tau$, что $[\Gamma]_{bX}\cap K=\varnothing$ для любого $\Gamma\in\gamma$. Так как $[\Gamma]_{bX}$ - компактное множество в bX, то существуют $B_1,B_2,...,B_n\in\beta$ такие, что $[\Gamma]_{bX}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$. Тогда $\Gamma\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, где $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\alpha$. Следовательно, (X,U) является равномерно τ - финально паракомпактным пространством.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X,U) - равномерное пространство и βX - его Стоун-Чеховское расширение. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. Равномерное пространство (X,U) равномерно τ-финально паракомпактно.
2. Для любого компакта $K\subset\beta X\setminus X$ существует локально конечное равномерное покрытие $\{B_i\}$ мощности $\le\tau$ такое, что $[B_i]_{\beta X}\cap K=\varnothing$ для любого $i\in I$.
3. Для каждого открытого в βX множества G, содержащего X, существует такое семейство $\{F_i\}$ замкнутых множеств в βX, мощности $\le\tau$, что $X\subset\cup\langle F_i\rangle\subset\cup F_i\subset G$ и семейство $\{F_i\cap X\}$ - локально конечное равномерное покрытие пространства (X,U), мощности $\le\tau$.
4. Для любого открытого множества G в βX, содержащего X, найдется такое открытое в βX покрытие $\{Q_i\}$ мощности $\le\tau$, что $X\subset\cup Q_i\subset\cup[Q_i]\subset Y$ и $\{Q_i\cap X\}$ - локально конечное равномерное покрытие мощности $\le\tau$ пространства (X,U).

5. Для любого компакта $K \subset bX \setminus X$ существует такое семейство $\{N_i\}$ открытых множеств в βX, мощности $\leq \tau$, что $K \subset \cap N_i \subset \cap [N_i] \subset \beta X \setminus X$ и семейство $\{(\beta X \setminus N_i) \cap X\} = \{X \setminus N_i\}$ - локально конечное равномерное покрытие пространства (X, U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Leftrightarrow 2)$ очевидно.

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть G открыто в βX и $G \supset X$. Положим $\beta X \setminus G = K$. Ясно, что $K \subset \beta X \setminus X$ - компакт. Найдем такое локально конечное равномерное покрытие $\{B_i\}$ пространства (X, U), мощности $\leq \tau$, что $[B_i] \cap K = \varnothing$ для любого $i \in I$. Тогда $[B_i] \subset \beta X \setminus K$ для любого $i \in I$. Следовательно, $X \subset \cup B_i \subset \langle [B_i] \rangle \subset \cup [B_i] \subset \beta X \setminus K$. Положим $F_i = [B_i]$. Тогда $X \subset \cup \langle F_i \rangle \subset \cup F_i \subset \beta X \setminus K = G$. Очевидно, что $F_i \cap X = [B_i]_X$. Так как $\{B_i\}$ - локально конечное, то $\{F_i \cap X\} = \{[B_i]_X\}$ также локально конечно. Равномерное покрытие $\{B_i\}$ вписано в покрытие $\{[B_i]_X\}$. Следовательно, $\{F_i \cap X\} = \{[B_i]_X\}$ является равномерным покрытием пространства (X, U) мощности $\leq \tau$.

$3) \Rightarrow 2)$. Пусть $K \subset \beta X \setminus X$ - произвольный компакт. Положим $G = \beta X \setminus K$. Очевидно, что G - открытое в βX множество, содержащее X. Тогда существует такое семейство $\{F_i\}$ замкнутых в βX множеств мощности $\leq \tau$, что $X \subset \cup \langle F_i \rangle \subset \cup F_i \subset G$ и семейство $\{F_i \cap X\}$ является локально конечным равномерным покрытием пространства (X, U) мощности $\leq \tau$. Положим $Q_i = \langle F_i \rangle \cap X$. Легко видеть, что $\{B_i\}$ - локально конечное равномерное покрытие мощности $\leq \tau$ и $[B_i] \cap K = \varnothing$ для любого $i \in I$.

$3) \Rightarrow 4)$. Пусть G - открытое в βX множество, содержащее X. Тогда существует такое семейство $\{F_i\}$ замкнутых множеств в βX мощности $\leq \tau$, что $X \subset \cup \langle F_i \rangle \subset \cup F_i \subset G$ и $\{F_i \cap X\}$ - локально конечное равномерное покрытие мощности $\leq \tau$ пространства (X, U). Имеет место включение $\langle F_i \rangle \subset [\langle F_i \rangle] \subset F_i$. Положим $Q_i = \langle F_i \rangle$. Следовательно, $\{Q_i\}$ является искомым семейством.

Доказательство $4) \Rightarrow 3)$ следует из $Q_i \subset \langle [Q_i] \rangle \subset [Q_i]$, где Q_i открытое в βX множество.

$3) \Rightarrow 5)$. Пусть $K \subset \beta X \setminus X$ - компакт и $G = \beta X \setminus K$. Тогда G - открытое в βX множество и $G \supset X$. Существует такое семейство $\{F_i\}$ замкнутых множеств в βX мощности $\leq \tau$, что $X \subset \cup \langle F_i \rangle \subset \cup F_i \subset G$. Семейство $\{F_i \cap X\}$ является локально конечным равномерным покрытием пространства (X, U). Положим $N_i = \beta X \setminus F_i$, $i \in I$. Тогда для открытого семейства $\{N_i\}$ пространства βX имеем $K \subset \cap N_i \subset \cap [N_i] \subset \beta X \setminus X$. Легко видеть, что $\{(\beta X \setminus N_i) \cap X\} = \{X \setminus N_i\}$ является локально конечным равномерным покрытием мощности $\leq \tau$.

Доказательство $5) \Rightarrow 3)$ очевидно.

Равномерное пространство (X, U) называется равномерно τ-локально компактным, если существует локально конечное равномерное покрытие мощности $\leq \tau$, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3. Любое равномерно τ-локально компактное пространство является равномерно τ-финально паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие. Тогда существует локально конечное равномерное покрытие β, мощности $\leq \tau$, состоящее из компактных подмножеств. Легко видеть, что покрытие β вписано в покрытие α.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любое равномерно τ-финально паракомпактное пространство является полным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Любое замкнутое подпространство M равномерно τ - финально паракомпактного пространства (X,U) равномерно τ-финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ - конечно аддитивное открытое покрытие пространства M. Обозначим через € - открытое покрытие пространства (X,U), состоящее из всех элементов покрытия γ и множества $X \setminus M$. Ясно, что € - конечно аддитивное покрытие. По условию, существует локально конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \tau$, вписанное в €. Обозначим β_M - след β на M. Тогда легко заметить, что β_M - равномерное покрытие подпространства M, вписанное в γ. Теперь покажем, что β_M локально конечное покрытие. Дейстаительно, пусть $x \in M$ произвольная точка. Так как β локально конечное равномерное покрытие, то найдется такая окрестность O_x, что она пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия β. Тогда множество $O_x \cap M$ тоже пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия β_M. Следовательно, подпространство M равномерно τ - финально паракомпактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Сумма любого семейства равномерно τ - финально паракомпактных пространств равномерно τ - финально паракомпактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(X_a,U_a): a \in K\}$ - произвольное семейство равномерно τ - финально паракомпактных пространств (X_a,U_a), а $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$ - сумма равномерных пространств. Рассмотрим произвольное конечно аддитивное открытое покрытие α пространства $(\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_a)$. Легко видеть, что семейство $\beta = \{X_a \cap A : a \in K, A \in \alpha\}$ снова является конечно аддитивным открытым покрытием пространства $(\coprod_{a\in K} X_a, \coprod_{a\in K} U_a)$, вписанным в α. Для каждого $a_0 \in K$ положим $\beta_{a_0} = \{X_{a_0} \cap A : a_0 \in K, A \in \alpha\}$. Ясно, что оно является конечно аддитивным открытым покрытием пространства (X_{a_0}, U_{a_0}), и поэтому, существует локально конечное равномерное покрытие $\gamma_{a_0} \in U_{a_0}$, мощности $\leq \tau$ вписанное в β_{a_0}. Далее рассмотрим семейство γ, являющееся объединением всех семейств γ_a, $a \in K$. Тогда легко понять, что семейство γ является равномерным покрытием пространства $(\coprod_{a\in K} X_a, \coprod_{a\in K} U_a)$ и оно вписано в α. Покажем, что γ - локально конечное. Пусть $x \in X$ - произвольная точка. Так как γ_a, $a \in K$ - локально конечное равномерное покрытие пространства (X_a,U_a), $a \in K$, то существует окрестность O_x пересекающееся лишь с конечным числом элементов покрытия γ_a, $a \in K$. В силу дизъюнктности пространств (X_a,U_a), $a \in K$, множество O_x пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия γ.

Напомним [1], что отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно совершенным, если оно совершенно в топологическом смысле и предкомпактно. Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется предкомпактным, если для любого $\alpha \in U$ существуют такие $\beta \in V$ и конечное покрытие $\gamma \in U$, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в покрытие α.

ТЕОРЕМА 4. При равномерно совершенных отображениях равномерно τ -финально паракомпактность сохраняется в сторону прообраза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Ясно, что покрытие $\{f^{-1}y : y \in Y\}$ вписано в покрытие α. Тогда $\beta = f^{\#}\alpha = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$, где $f^{\#}A = Y \setminus f(X \setminus A)$, является открытым покрытием пространства

(Y,V). Рассматривая всевозможные конечные объединения множеств из β, построим открытое покрытие $\beta^{\angle}$. В покрытие $\beta^{\angle}$ впишем локально конечное равномерное покрытие $\gamma \in V$ мощности $\leq \tau$. Легко видеть, что во первых, покрытие $f^{-1}\beta^{\angle}$ вписано в покрытие α, во-вторых, $f^{-1}\gamma$ - локально конечное равномерное покрытие пространства (X,U) вписанное в покрытие α. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ -финально паракомпактным пространством.

Напомним [2], что отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется ω отображением, где ω - открытое покрытие пространства (X,U), если для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность O_y и $W \in \omega$ такие, что $f^{-1}O_y \subset W$.

ТЕОРЕМА 5. Равномерное пространство (X,U) равномерно τ - финально паракомпактно тогда и только тогда, когда для каждого конечно аддитивного открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω -отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на метризуемое равномерно τ -финально паракомпактное пространство (Y,V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - метризуемое равномерно τ - финально паракомпактное пространство и ω - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие. Тогда тождественное отображение пространства (X,U) является требуемым равномерно непрерывным ω-отображением пространства (X,U) в метризуемое равномерно τ - финально паракомпактное пространство.

Достаточность. Пусть ω - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда существует равномерно непрерывное ω -отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на некоторое метризуемое равномерно τ -финально паракомпактное пространство (Y,V). Для каждой точки $y \in Y$ существует такая окрестность O_y, прообраз $f^{-1}O_y$ которой содержится в некотором элементе покрытия ω. Положим $\beta = \{O_y : y \in Y\}$. Образуем открытое покрытие $\beta^{\angle}$, состоящее из всевозможных конечных объединений элементов покрытия β. Впишем в него локально конечное равномерное покрытие $\gamma \in V$ мощности $\leq \tau$.Тогда $f^{-1}\gamma$ есть равномерное покрытие пространства (X,U), вписанное в покрытие ω. Покажем, что $f^{-1}\gamma$ является локально конечным равномерным покрытием. Действительно, пусть $x \in X$ - произвольная точка. Тогда для точки $y = f(x)$ существует окрестность O_y, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия γ. Положим $f^{-1}O_y = O$. Тогда O является искомой окрестности точки $x \in X$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ -финально паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Произведение равномерно τ -финально паракомпактного равномерного пространства (X,U) на компактное равномерное пространство (Y,V) является равномерно τ - финально паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - равномерно τ - финально паракомпактное пространство и (Y,V) - компактное равномерное пространство. Так как проекция $\pi_X : (X,U) \times (Y,V) \to (X,U)$ равномерно совершенна, то она является ω -отображением произведения $(X,U) \times (Y,V)$ на равномерно τ -финально паракомпактное пространство (Y,V) для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω пространства $(X,U) \times (Y,V)$. Тогда равномерное пространство $(X,U) \times (Y,V)$ по теореме 5. является равномерно τ -финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 6. Локально компактное равномерное пространство (X,U) равномерно τ - финально паракомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) равномерно τ - локально компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - равномерно τ - финально паракомпактно и (X,τ_U) - локально компактно. Тогда каждая его точка x обладает открытой окрестностью O_x, замыкание $[O_x]$ которой компактно. Ясно, что семейство $\alpha = \{O_x : x \in X\}$ образует открытое покрытие пространства (X,U). Образуем покрытие $\alpha^{\angle}$, состоящее из всевозможных конечных объединений покрытия α. Ясно, что $\alpha^{\angle}$ - конечно аддитивное открытое покрытие. В него впишем локально конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\le \tau$. Каждое $B \in \beta$ содержится в некотором множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Так как $[B] \subset [\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}]$, то $[B]$ компактно, как замкнутое подмножество компактного множества $[\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [O_{x_i}]$. Следовательно, $[\beta] = \{[B] : B \in \beta\}$ - локально конечное равномерное покрытие мощности $\le \tau$, состоящее из компактных подмножеств. Значит, (X,U) - равномерно τ -локально компактно.

Достаточность. Пусть γ - локально конечное равномерное покрытие мощности $\le \tau$, состоящее из компактных подмножеств. Тогда $\gamma \succ \alpha^{\angle} = \alpha$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ -финально паракомпактным.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2013.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор, академик НАН КР Борубаев А.А.