

Исабеков К.А., Байболотов Б.А.

**ЖЕР АЛДЫНДАГЫ СУУЛАРДЫН ФИЛЬТРАЦИЯСЫНЫН БИР ӨЛЧӨМДҮҮ
МАСЕЛЕСИНИН СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАЛЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН
ПРОГОНКА МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ**

Исабеков К.А., Байболотов Б.А.

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД МЕТОДОМ
ПРОГОНКИ**

K.A. Isabekov, B.A. Baibolotov

**THE SOLUTION SYSTEM OF THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS OF THE ONE-
DIMENSIONAL PROBLEM OF GROUNDWATER FILTRATION BY THE SWEEP
METHOD**

УДК: 532.546

Цель статьи – раскрыть проблему применения метода прогонки при решении системы линейных алгебраических уравнений. Авторами рассмотрены решения одномерной задачи фильтрации подземных вод, где применяется обобщенный принцип Галеркина и получена система линейных алгебраических уравнений. Показаны выражения для вычисления коэффициентов системы. А также даны формулы для прогоночных коэффициентов и формулу нахождения искомой функции.

Ключевые слова: *фильтрация подземных вод, обобщенный принцип Галеркина, система линейных алгебраических уравнений, метод прогонки, прогоночные коэффициенты, аппроксимация, краевая задача.*

Макаланын максаты – сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын чыгарууда прогонка методун колдонууну көрсөтүү. Авторлор тарабынан жер алдындагы суулардын фильтрациясынын бир өлчөмдүү маселесине Галеркиндин принциби колдонуу менен теңдемелер системасы алынган. Сызыктуу алгебралык теңдемелер системасынын коэффициенттерин туюнтмалары берилген. Андан сырткары прогондоо коэффициенттеринин жана изделүүчү функцияны табуунун формулалары көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *жер алдындагы суулардын фильтрациясы, Галеркиндин принциби, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасы, прогонка методу, прогондоо коэффициенттери, аппроксимациялоо, четки маселе.*

The purpose of the article is to reveal the problem of using the sweep method in solving a system of linear algebraic equations. The authors considered the solutions of the one-dimensional problem of groundwater filtration, where the generalized Galerkin principle is applied and a system of linear algebraic equations is obtained. Expressions for calculating the coefficients of the system are shown. And also formulas are given for the running coefficients and the formula for finding the desired function.

Key words: *groundwater filtration, generalized Galerkin principle, system of linear algebraic equations, sweep method, run coefficients, approximation, boundary value problem.*

Решение гидрогеологических задач, обычно осуществляется на базе типовых расчетных схем, т. е. таких схем, для которых имеются решения соответствующих дифференциальных уравнений фильтрации. Для построения расчетных схем осуществляется схематизация, т. е. упрощение природных условий путем последовательного анализа гидродинамических особенностей потока с использованием критериев, позволяющих качественно и количественно оценить допустимость предполагаемого упрощения. При исследовании задач фильтрации численными методами, особенно при идентификации параметров среды, одной из основных трудностей является решение системы, состоящей из большого количества уравнений. Поэтому создание эффективного метода приближенного решения начально-краевой задачи представляет собой актуальную проблему. Задачи решаются с обязательным применением ЭВМ.

Рассмотрим конкретную физическую задачу. Во многих случаях течение грунтовых вод можно считать одномерным, например, течение к рекам или водоемам в межгорных впадинах; течение к скважинам; течение к горизонтальным дренам при проведении промывок и т.д. Различные прогнозные задачи мелиоративной гидрогеологии в таких случаях сводятся к решению одномерного движения подземных вод, которая описывается уравнением [1]

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial H}{\partial x} \right] + QH = f, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$-\frac{\partial H}{\partial x} + \beta_0 H = \alpha_0, \quad x = 0,$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} + \beta_n H = \alpha_n, \quad x = l.$$

условиями, где точки $x = 0$ и $x = l$ являются точками начала и конца рассматриваемого отрезка; $H(x)$ – уровень грунтовых вод (УГВ) в точке x ; $f(x)$ – функция источников и стоков; $Q = Q(x) > 0$ – функция, учитывающая водообмен с выше - и ниже лежащими пластами; $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ – заданные функции; $T = T(x) = m(x)k(x)$ – водопроводимость, $m(x)$ – мощность, $k(x)$ – коэффициент фильтрации пласта.

Отрезок $[0, l]$ разобьем точками $x_i = x_{i-1} + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$ на n частей (элементов) длиной $h = \frac{l}{n}$ и на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ представим искомую функцию в виде [5]

$$H(x) = W_{i-1}(x)H_{i-1} + W_i(x)H_i, \quad (2)$$

$$\text{где } W_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{h}, \quad W_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}.$$

Функции $W_{i-1}(x)$ и $W_i(x)$ отличны от нуля только на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а вне его равны нулю. Суммируя равенство (2) по всем элементам, получаем функцию

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x)H_i + W_0H_0 + W_nH_n, \quad (3)$$

Аппроксимирующую напорную функцию на отрезке $[0, l]$.

Заменяя функцию $H(x)$ функцией $H_n(x)$ и применяя к задаче (1) обобщенный принцип Галеркина [5], имеем систему уравнений

$$\int_0^l W_i \left[-\frac{d}{dx} \left(T \frac{dH_n}{dx} \right) + QH_n - f \right] dx + W_i \left(-T \frac{dH_n}{dx} + \beta_0 H_n - \alpha_0 \right) \Big|_{x=0} + \\ + W_i \left(T \frac{dH_n}{dx} + \beta_n H_n - \alpha_n \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

или после упрощения

$$\int_0^l T \frac{dH_n}{dx} \frac{dW_i}{dx} dx + \int_0^l W_i QH_n dx - \int_0^l W_i f dx + \beta_0 H_0 - \alpha_0 + \beta_n H_n - \alpha_n = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

После подстановки вместо $H_n(x)$ ее разложение (3) приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_0 H_0 + b_0 H_1 = d_0, \\ a_i H_{i-1} + b_i H_i + c_i H_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ b_n H_{n-1} + c_n H_n = d_n, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} T dx + \int_{x_0}^{x_1} W_0^2 Q dx + \beta_0, \quad b_0 = \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} T dx + \int_{x_0}^{x_1} W_0 W_1 Q dx, \quad d_0 = \int_{x_0}^{x_1} W_0 f dx + \alpha_0, \\
 a_i &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} W_{i-1} W_i Q dx, \\
 b_i &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} T dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} W_i^2 Q dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i^2 Q dx, \quad c_i = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i W_{i+1} Q dx, \\
 d_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} W_i f dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i f dx, \quad c_n = \frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} T dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} W_n^2 Q dx + \beta_n, \\
 b_n &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} T dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} W_{n-1} W_n Q dx, \quad d_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} W_n f dx + \alpha_n.
 \end{aligned}$$

Система (4) решается методом прогонки [4]. Ее решение ищется в виде

$$H_i = U_i H_{i+1} + V_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Тогда

$$H_{i-1} = U_{i-1} U_i H_{i+1} + U_{i-1} V_i + V_{i-1}.$$

Подставляя выражения для H_{i-1} и H_i в уравнение (4), получаем формулы для прогоночных коэффициентов:

$$U_i = -\frac{c_i}{a_i U_{i-1} + b_i}, \quad V_i = \frac{d_i - a_i V_{i-1}}{a_i U_{i-1} + b_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

Для проведения расчетов по формулам (6) необходимо иметь значения U_0 и V_0 , которые определяются из первого уравнения системы (4):

$$U_0 = -\frac{b_0}{a_0}, \quad V_0 = -\frac{d_0}{a_0}. \quad (7)$$

Используя формулы (7), по формулам (6) вычисляются прогоночные коэффициенты $U_i, V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$.

Из последнего уравнения системы (4) и уравнения (5) при $i = n-1$ находим

$$H_n = \frac{d_n - b_n V_{n-1}}{b_n U_{n-1} + c_n} \text{ и подставляя это значение в формулу (5), вычисляем значения искомой функции } H_i, \quad i = n-1, \dots, 1, 0.$$

Литература:

1. Бочевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. -М.: Недра, 1969.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.
3. Полубаринова – Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа –М.: 1967.
5. Сегерлинд Л. Применение методов конечных элементов. – М.: Мир, 1979.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Тултуков Б.Т.