Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

ОҢ ЖАГЫ ТЕГИЗ ЭМЕС УЧУРДАГЫ, ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ КИЧИНЕ ПАРАМЕТРЛҮҮ ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ, КОГДА ПРАВЫЕ ЧАСТИ НЕГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ

K. Kakishov, J.K. Kakishov, B.A. Sadykova

SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF FREDHOLM'S INTEGRO-DIFFERENTIAL EGUATIONS WITH A SMALL PARAMETER, WHEN THE RIGHT-HAND SIDES ARE NON-SMOOTH FUNCTIONS

УДК: 517.9

Импульстун таасири астындагы, сызыктуу эмес сингулярдык дүүлүккөн интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн асимптотикалык формуласынын чыгарылышы түзүлдү. $(0,1]$ *кесиндисинде* $\varepsilon\to 0$ *учурда импульстук, сингулярдык-дүүлүккөн интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин ички баштапкы секиртмелүү чыгарылышынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынды.*

Негизги сөздөр: *асимптотика, баштапкы маселе, ички баштапкы секиртмелүү маселе, импульстун таасири, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, Дирактын импульстук дельта-функциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

Построены асимптотические формулы для нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, с внутренним начальным скачком. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при $\varepsilon\to 0$ *на отрезке* $(0,1]$.

Ключевые слова: *асимптотика, начальная задача, импульсное воздействие, начальный скачок, ступенчатая функция Хевисайда, импульсная дельта-функция Дирака, разрыв первого рода, малый параметр.*

Asymptotic formulas for nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse control were developed. Have been received enough conditions of existence and singularity of perturbed equations for singular perturbed differential equations with impulse control under $\varepsilon\to 0$ *when on the segment* $(0,1]$.

Key words: *asymptotic boundary equation, impulse, Hevisayd's step function, impulse Dirac's delta function, the first kind of gap, a small parameter.*

В работе [1] рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, когда вырожденное уравнение имеет непрерывное решение. Здесь рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в виде:

$$\varepsilon y'(x)+y(x)=\int_0^1 K(x,t)y(t)dt+f_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x)+\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(p_k)+\varepsilon Q(x,\int_0^1 H(x,t)y(t)dt) \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(0)=b, \quad (1_0)$$

где A_k,b- заданные постоянные, $\varepsilon>0$ - малый параметр, $f_k(x)$- непрерывная функция на сегменте $[0,1]$, $0<x_1<x_2<...<x_N<1$ - некоторые известные числа $p_k=x-x_k$, x_k - точка разрыва, $\theta(x)$- функция Хевисайда $\theta(+0)=1,\theta(0)=0,$ $\theta'(x)=\delta(x)$ – функция Дирака, $K(x,t),Q(x,y,q(x)),f_0(x),q(x)\equiv\int_0^1 H(x,t)y(t)dt$ - заданные непрерывные функции.

Подстановкой

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k(x), \quad (1_1)$$

где $y_0(x), y_k(x)$ - пока неизвестные функции.

Подставляя (1_1) в (1) получаем

$$\varepsilon y_0' + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\delta(p_k)y_k(x_k) + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k'(x) + y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k = \int_0^1 K(x,t)\left[y_0(t) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\rho_k\right]dt +$$

$$+f_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x) + \sum_{k=1}^{N}A_k\delta(p_k) + \varepsilon Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)(y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k\right)dt. \tag{1_2}$$

Приравнивая коэффициенты $\delta(p_k)$ определим неизвестные постоянные с начальным скачком во внутренних точках $x = x_k$ в виде:

$$y_k(x_k) = \tfrac{A_k}{\varepsilon}, k = \overline{1, N}. \tag{1_3}$$

Тогда нелинейное интегро-дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\varepsilon y_0' + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k' + y_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k = \int_0^1 K(x,t)\left[y_0(t) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k(t))y_k(t)\right]dt +$$

$$+f_0(x) + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x) + \varepsilon Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)\left(y_0 + \sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k\right)dt\right). \tag{1_4}$$

Рассмотрим функцию

$$Q(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_0^1 H(x,t)\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k)dt =$$

$$= \begin{cases} Q\left(\int_0^1 H(x,t)y_0dt\right) & 0 \le x \le x_1, \\ Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1)dt\right) & x_1 < x \le x_2, \\ Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1)dt + \int_{x_2}^1 H(x,t)y_2)dt\right) & x_2 < x \le x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1)dt + \ldots + \int_{x_N}^1 H(x,t)y_N)dt\right) & x_N < x \le 1 \end{cases}$$

$$= Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt\right) + \theta(p_1)\left[Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt\right) - Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt\right)\right] +$$

$$+\theta(p_2)\left[Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt + \int_{x_2}^1 H(x,t)y_2dt\right) - \right.$$

$$\left. - Q\left(x, \int_0^1 H(x,t)y_0dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt\right)\right] + \ldots + \tag{1_5}$$

$$+\theta(p_N)\left[Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt+...+\int_{x_N}^1 H(x,t)y_Ndt\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt+...+\int_{x_{N-1}}^1 H(x,t)y_Ndt\right)\right].$$

Подставляя (1_5) в (1_4), а затем, приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$ получим следующую цепочку нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon y'_0+y_0=\int_0^1 K(x,t)y_0dt+f_0(x)+\varepsilon Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt\right),\qquad 0<x\le 1 \tag{1_6}$$

$$y(0)=b.$$

$$\varepsilon y'_1+y_1=\int_{x_1}^1 K(x,t)y_1dt+f_1(x)+\varepsilon\left[Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt\right)-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt\right)\right]$$

$$(x_1<x\le 1)\,, \tag{1_7}$$

$$y_1(x_1)=\frac{A_1}{\varepsilon}.$$

$$\varepsilon y'_2+y_2=\int_{x_2}^1 K(x,t)y_2dt+f_2(x)+\varepsilon\left[Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt+\int_{x_2}^1 H(x,t)y_2dt\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt\right)\right]\qquad \left(x_2<x\le 1\right), \tag{1_8}$$

$$y_2(x_2)=\frac{A_2}{\varepsilon}.$$

……………………………………………………………………………………..

$$\varepsilon y'_N+y_N=\int_{x_N}^1 K(x,t)y_Ndt+f_N(x)+\varepsilon\left[Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)y_1dt+...+\int_{x_N}^1 H(x,t)y_Ndt\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)y_0dt+...+\int_{x_{N-1}}^1 H(x,t)y_{N-1}dt\right)\right]\qquad \left(x_N<x\le 1\right), \tag{1_9}$$

$$y_N(x_N)=\frac{A_N}{\varepsilon}.$$

Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1_6) будем искать в виде:

$$y_0(x)=v_0(x)+\Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_0(x,\varepsilon) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\Pi_0(0)=b-v_0(0),\xi_0(0,\varepsilon)=0.$$

Подставляя (2) в (1_6) для неизвестных функций $v_0(x),\Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\xi_0(x,\varepsilon)$ получим следующее уравнение:

$$v_0(x)=\int_0^1 K(x,t)v_0(t)dt+f_0(x), \tag{2_1}$$

$$\dot{\Pi}_0(\tau)+\Pi_0(\tau)=0,\ \Pi_0(0)=b-v_0(0). \qquad (2_2)$$

$$\varepsilon\xi'_0+\xi_0=\int_0^1 K(x,t)\xi_0dt+v_0'(x)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K(x,t)\Pi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt+Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt\right), \qquad (2_3)$$

$$\xi_0(0,\varepsilon)=0.$$

Так как единица не является собственным значением ядра $K(x,t)$, неоднородное интегральное уравнение (2_1) имеет решение

$$v(x)=f_0(x)+\int_0^1 R(x,t)f_0(t)dt,$$

где $R(x,t)$ - резольвента ядра $K(x,t)$.

Однородное дифференциальное уравнение (2_2) имеет решение

$$\Pi_0(\tau)=e^{-\tau}\left[b-v(0)\right].$$

Можно доказать, что $\left|\xi_0(x,\varepsilon)\right|\le C_0=const>0$ не зависит от x и от ε, причем при $\varepsilon\to 0$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_6) имеет единственное непрерывное решение в виде (2) и стремится к решению вырожденного уравнения $v_0(x)$ на полусегменте $0<x\le 1$.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_7), решение ищем в виде:

$$y_1(x,\varepsilon)=v_1(x)+\frac{\Pi_{-1}\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_1\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_1(x,\varepsilon) \qquad (2_4)$$

с начальными условиями:

$$\Pi_{-1}(0)=A_1,\ \Pi_1(0)=-v_1(x_1),\ \xi_1(x_1,\varepsilon)=0. \qquad (2_5)$$

Подставляя (2_4) в (1_7), получим:

$$\varepsilon v_1'+\frac{\dot{\Pi}_{-1}\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\dot{\Pi}_1+\varepsilon^2\xi_1'+v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1=\int_{x_1}^1 K(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt+f_1(x)+$$

$$+\varepsilon\left[Q(x,\int_{x_1}^1 K(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt)-Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt)\right].$$

Отсюда определим неизвестные функции в виде:

$$v_1(x)=\int_{x_1}^1 K(x,t)v_1dt+f_1(x)+\int_0^\infty K(x,x_1)\Pi_{-1}(\tau_1)d\tau, \qquad (2_6)$$

$$\dot{\Pi}_{-1}(\tau)+\Pi_{-1}(\tau)=0,$$
$$\dot{\Pi}_1(\tau_1)+\Pi_1(\tau_1)=0. \qquad (2_7)$$

$$\varepsilon\xi'_1+\xi_1=\int_0^1 K(x,t)\xi_1 dt - v_1'(x)+\int_0^\infty K'_{\tau_1}(x,x_1+\theta_0,\tau_1)\tau_1\Pi_{-1}(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^1 K(x,t)\Pi_1\left(\frac{t-x_1}{\varepsilon}\right)dt+$$
$$+Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_0)dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1(t)+\frac{\Pi_{-1}\left(\frac{t-x_1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_1(\frac{t-x_1}{\varepsilon})+\varepsilon\xi_1)dt\right)- \tag{2_8}$$
$$-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0(\frac{t}{\varepsilon})+\varepsilon\xi_0)dt\right).$$

Уравнение (2_7), (2_5) имеет решение

$$\Pi_{-1}(\tau_1)=A_1e^{-\tau_1}. \tag{2_9}$$

Подставляя (2_9) в (2_6), получим:

$$v_1(x)=\int_{x_1}^1 K(x,t)\xi v_1 dt+f_1(x)+K(x,x_1)A_1.$$

Так как, единица не является собственным значением ядра $K(x,t)$. Пусть $R_1(x,t)$ резольвента ядра $K(x,t)$ в области $[x_1\le x,t\le 1]$. Определим $v_1(x)$ в виде:

$$v_1(x)=K(x,x_1)A_1+f_1(x)+\int_{x_1}^1 R_1(x,t)[K(t,x_1)A_1+f_1(t)]dt\equiv v_{10}(x).$$

Уравнение (2_7), (2_5) имеет решение

$$\Pi_1(\tau_1)=-v_1(x_1)e^{-\tau_1}. \tag{2_{10}}$$

Интегро-дифференциальное уравнение (2_8) имеет решение $\left|\xi_1(x,\varepsilon)\right|\equiv C_1=const>0$ не зависит от x и от ε. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_7) имеет единственное непрерывное решение (2_4), при $\varepsilon\to 0$, это решение сходится к решению $v_{10}(x)$ на полусегменте $x_1<x\le 1.$

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_8)

$$y_2(x)=v_2(x)+\frac{\Pi_{-2}\left(\frac{x-x_2}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_2\left(\frac{x-x_2}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_2(x,\varepsilon). \tag{3}$$

Подставляя (3) в начальное условие

$$\frac{A_2}{\varepsilon}=v_2(x_2)+\frac{\Pi_{-2}(0)}{\varepsilon}+\Pi_2(0)+\varepsilon\xi_1(x_2,\varepsilon).$$

Отсюда определим $\Pi_{-2}(0)=A_2,\ \Pi_2(0)=-v_2(x_2),\ \ \xi_2(x_2,\varepsilon)=0.$ (3_0)

Подставляя (3), (2), (2_4) в (1_8) получим:

$$\varepsilon v_2' + \frac{\dot{\Pi}_{-2}}{\varepsilon} + \dot{\Pi}_2 + \varepsilon^2 \xi_2' + v_2 + \frac{\Pi_{-2}}{\varepsilon} + \Pi_2 + \varepsilon \xi_2 =$$

$$= \int_{x_2}^{1} K(x,t)[v_2 + \frac{\Pi_{-2}\left(\frac{t-x_2}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + \Pi_2\left(\frac{t-x_2}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_2]dt + f_2(x) +$$

$$+\varepsilon\Big[Q(x, \int_0^1 H(x,t)(v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0)dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1 + \frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon} + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1)dt + \quad (3_1)$$

$$+\int_{x_2}^1 H(x,t)(v_2 + \frac{\Pi_{-2}}{\varepsilon} + \Pi_2 + \varepsilon\xi_2)dt) -$$

$$-Q(x, \int_0^1 H(x,t)(v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0)dt) + \int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1 + \frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon} + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1)dt)\Big].$$

Определим неизвестные функции $[\Pi_{-2}, v_2, \Pi_2, \xi_2]$ в виде:

$$\dot{\Pi}_{-2}(\tau_2) + \Pi_{-2}(\tau_2) = 0, \ \tau_2 = \frac{x - x_2}{\varepsilon} \quad (3_2)$$

$$\Pi_{-2}(0) = A_2,$$

$$\dot{\Pi}_2(\tau_2) + \Pi_2(\tau_2) = 0, \quad (3_3)$$

$$\Pi_2(0) = -v_2(x_2),$$

$$v_2(x) = \int_{x_2}^1 K(x,t)v_2 dt + f_2(x) + \int_0^\infty K(x,x_2)\Pi_{-2}(\tau_2)d\tau_2 . \quad (3_4)$$

$$\varepsilon\xi_2' + \xi_2 = \int_{x_2}^1 K(x,t)\xi_2(t,\varepsilon)dt + g_2(x,\varepsilon) + \gamma_2(x,\xi_2,\varepsilon) , \quad (3_5)$$

$$\xi_2(x_2,\varepsilon) = 0,$$

где

$$g_2(x,\varepsilon) = -v_2'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_2}^1 K(x,t)\Pi_2\left(\frac{t-x_2}{\varepsilon}\right)dt + \int_0^\infty K'_{\tau_2}(x, x_2 + \theta_0\varepsilon\tau_2)\tau_2\Pi_{-2}\left(\tau_2\right)dt +$$

$$+Q(x, \int_0^1 H(x,t)(v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0)dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1 + \frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon} + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1)dt +$$

$$+\int_{x_2}^1 H(x,t)(v_2 + \frac{\Pi_{-2}}{\varepsilon} + \Pi_2)dt) - Q(x, \int_0^1 H(x,t)(v_0 + \Pi_0 + \varepsilon\xi_0)dt +$$

$$+\int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1 + \frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon} + \Pi_1 + \varepsilon\xi_1)dt).$$

$$\gamma_2(x,\xi,\varepsilon)\equiv Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt+\int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt+$$

$$+\int_{x_2}^1 H(x,t)(v_2+\frac{\Pi_{-2}}{\varepsilon}+\Pi_2+\varepsilon\xi_2)dt)-Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt+$$

$$+\int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt+\int_{x_2}^1 H(x,t)(v_2+\frac{\Pi_{-2}}{\varepsilon}+\Pi_2)dt).$$

Дифференциальные уравнения (3_2), (3_3) имеют решение

$$\Pi_{-2}(\tau_2)=e^{-\tau_2}A_2,\qquad \Pi_2(\tau_2)=-v_2(x_2)e^{-\tau_2}.$$

Пусть $R_2(x,t)$ резольвента ядра $K(x,t)$ на сегменте $[x_2\le t,\ x\le 1]$. Определим $v_2(x)$:

$$v_2(x)=f_2(x)+K(x,x_2)A_2+\int_{x_2}^1 R_2(x,t)[f_2(x)+K(x,x_2)A_2]dt\equiv v_{20}(x).$$

Имеют места оценки

$$\left|g_2(x,\varepsilon)\right|\le C_2=const,\ \left|\gamma_2(x,\xi_2,\varepsilon)\right|\le\varepsilon C_2.$$

Можно доказать при достаточно малых значений $0<\varepsilon<\varepsilon_2$, ($\varepsilon_2$ - фиксированное число), уравнение (3_5) имеет единственное решение $\left|\xi_2(x,\varepsilon)\right|\le 2C_2=const.$ Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_8) имеет единственное непрерывное решение (3), причем, при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к решению $v_{20}(x)$ на полусегменте $x_2<x\le 1$.

Продолжая этот процесс находим $y_3(x),...,y_{N-1}(x)$.

$$y_3(x,\varepsilon)=v_3+\frac{\Pi_{-3}\left(\frac{x-x_3}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_3\left(\frac{x-x_3}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_3(x,\varepsilon),...,$$

$$y_{N-1}(x,\varepsilon)=v_{N-1}+\frac{\Pi_{-(N-1)}\left(\frac{x-x_{N-1}}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_{N-1}\left(\frac{x-x_{N-1}}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_{N-1}(x,\varepsilon).\qquad (3_6)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (1_9) ищем в виде:

$$y_N(x,\varepsilon)=v_N(x)+\frac{\Pi_{-N}\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+\Pi_N\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\xi_N(x,\varepsilon)\qquad (3_7)$$

с начальным условием:

$$\Pi_{-N}(0)=A_N,\ \Pi_N(0)=-v_N(x_N),\ \xi_N(x_N,\varepsilon)=0.\qquad (3_8)$$

Подставляя (3_6), (3_7) в (1_9) получим:

$$\varepsilon v_N' + \frac{\dot{\Pi}_{-N}\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + \dot{\Pi}_N\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\xi_N' + v_N + \frac{\Pi_{-N}\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + \Pi_N\left(\frac{x-x_N}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_N =$$

$$= \int_{x_N}^{1} K(x,t)[v_N(t) + \frac{\Pi_{-N}\left(\frac{t-x_N}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + \Pi_N\left(\frac{t-x_N}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_N(t,\varepsilon)]dt + f_N(x) +$$

$$+\varepsilon\big[Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt + \int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt + \ldots +$$

$$+\int_{x_{N-1}}^1 H(x,t)(v_{N-1}+\frac{\Pi_{-(N+1)}}{\varepsilon}+\frac{\Pi_{N-1}}{\varepsilon}+\varepsilon\xi_{N-1})dt +$$

$$+\int_{x_N}^1 H(x,t)(v_N + \frac{\Pi_{-N}\left(\frac{t-t_N}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + \Pi_N\left(\frac{t-t_N}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_N)dt) -$$

$$-Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt) + \int_{x_1}^1 H(x,t)(v_1+\frac{\Pi_{-1}}{\varepsilon}+\Pi_1+\varepsilon\xi_1)dt + \ldots +$$

$$+\int_{x_{N-1}}^1 H(x,t)(v_{N-1}+\frac{\Pi_{-(N+1)}}{\varepsilon}+\Pi_{N-1}+\varepsilon\xi_{N-1})dt)]. \tag{3$_9$}$$

Определим неизвестные функции $[v_N, \Pi_{-N}, \Pi_N, \xi_N]$ в виде:

$$\dot{\Pi}_{-N}(\tau_N) + \Pi_{-N}(\tau_N) = 0,\ \Pi_{-N}(0) = A_N, \tag{4}$$

$$v_N(x) = \int_{x_N}^1 K(x,t)v_N dt + \int_0^\infty K(x,x_N)\Pi_{-N}(\tau_N)d\tau_N + f_N(x), \tag{4$_0$}$$

$$\dot{\Pi}_N(\tau_N) + \Pi_N(\tau_N) = 0,\ \ \Pi_N(0) = -v_N(x_N), \tag{4$_1$}$$

$$\varepsilon\xi_N' + \xi_N = \int_{x_N}^1 K(x,t)\xi_N(t,\varepsilon)dt + g_N(x,\varepsilon) + \gamma_N(x,\xi_N,\varepsilon). \tag{4$_2$}$$

$$\xi_N(x_N,\varepsilon) = 0.$$

где

$$g_N(x,\varepsilon) = -v_N'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_N}^1 K(x,t)\Pi_N\left(\frac{t-x_N}{\varepsilon}\right)dt + \int_0^\infty K'_{\tau_N}(x,x_N+\theta_0\varepsilon\tau_N)\tau_N\Pi_{-N}d\tau_N +$$

$$+Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt + \ldots + \int_{x_N}^1 H(x,t)\left(v_N+\frac{\Pi_{-N}}{\varepsilon}+\Pi_N\right)dt\right) -$$

$$-Q\left(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt + \ldots + \int_{x_{N-1}}^1 H(x,t)\left(v_{N-1}+\frac{\Pi_{-(N+1)}}{\varepsilon}+\Pi_{N-1}+\varepsilon\xi_{N-1}\right)dt\right),$$

$$\gamma_N(x,\xi_N,\varepsilon)\equiv Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt+...+\int_{x_N}^1 H(x,t)(v_N+\frac{\Pi_{-N}}{\varepsilon}+\Pi_N+\varepsilon\xi_N)dt)-$$

$$-Q(x,\int_0^1 H(x,t)(v_0+\Pi_0+\varepsilon\xi_0)dt+...+\int_{x_N}^1 H(x,t)(v_N+\frac{\Pi_{-N}}{\varepsilon}+\Pi_N)dt).$$

Уравнение (4), (4_0), (4_1) имеют решение

$$v_N(x)=f_N(x)+K(x,x_N)A_N+\int_{x_N}^1 R_N(x,t)[f_N(x)+K(x,x_N)A_N]dt\equiv v_{N0}(x)$$

$$\Pi_{-N}(\tau_N)=e^{-\tau_N}A_N,\qquad \Pi_N(\tau_N)=-v_N(x_N)e^{-\tau_N}.$$

Имеют места оценки

$\left|g_N(x,\varepsilon)\right|\le C_N=const$, $\left|\gamma_N(x,\xi_N,\varepsilon)\right|\le\varepsilon C_N=const$ не зависит от ε и от x.

При достаточно малых значений $0<\varepsilon<\varepsilon_N$, ($\varepsilon_N$ - фиксированное число) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1_9) имеет единственное непрерывное решение (3_7), причем, при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к решению $v_{N0}(x)$ на полусегменте $x_N<x\le 1$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть 1) $f_k(x)$, $(k=\overline{0,N})$ $Q(x,y,q(x))$, $q(x)=\int_0^1 H(x,t)y(t)dt, K(x,t)$ - заданные непрерывно-дифференцируемые функции,

2) единица не является собственным значением ядра $K(x,t)$ в области $(0\le x,t\le 1)$.

Тогда нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1), (1_0) при достаточно малых $0<\varepsilon<\varepsilon_k, k=\overline{0,N}$, ($\varepsilon_k$ - фиксированное число) имеет единственное разрывное решение причем, при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к разрывному видоизмененному решению $v_0(x)+\sum_{k=1}^N\theta(p_k)v_k(x)$ на сегменте $0<x\le 1$.

Литература:

1. Иманалиев М. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1972.
2. Садыкова Б.А. Асимптотические оценки решения нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. // Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана». - Бишкек №4, 2016.

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Раманкулов С.Т.