Байманкулов А.Т., Адамов А.А., Жуаспаев Т.А.

ТОПЫРАҚТЫҢ ЖЫЛУ ШЫҒЫНДАУ КОЭФФИЦИЕНТІНІҢ АҚЫРЛЫ-АЙЫРЫМДЫҚ СӘЙКЕСТЕНДІРУ ӘДІСІ

Байманкулов А.Т., Адамов А.А., Жуаспаев Т.А.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ ГРУНТА

A.T. Baimankulov, A.A. Adamov, T.A. Zhuaspaev

FINITE-DIFFERENCE METHOD OF IDENTIFICATION COEFFICIENT OF HEAT TRANSFER OF SOIL

УДК: 519.62: 624.131

Жұмыс мазмұнында математикалық және компьютерлік модельдеу көмегімен, «топырақ - атмосфераның жер бетіне жақын қабаты» шегіндегі күрделі, көп факторлы, стационар емес жылу алмасу процесстерінің мәселесі қарастырылады.

Кілттік сөздер: *жылу шығындау коэффициенті, кері есеп, түйіндес есеп, бастапқы-шекті шарттар.*

В работе рассматривается проблема процессов сложного, многофакторного, нестационарного теплообмена на границе «почва – приземный слой атмосферы» с помощью математического и компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *коэффициент теплоотдачи, обратная задача, сопряженная задача, начально-граничные условия.*

The paper deals with the problem of complex, multifactorial, non-stationary heat transfer at the boundary "soil – surface layer of the atmosphere" using mathematical and computer modeling

Key words: *heat transfer coefficient, inverse problem, conjugate problem, initial-boundary conditions.*

Во многих исследованиях тепловые процессы в почве изучаются в изолированном виде, в отрыве от атмосферы, описывающей почвенную поверхность. Исследование энергетических процессов в почве как замкнутой системе, безусловно, имеет актуальное значение в большом числе случаев, наблюдающихся в практике. Одной из важных составляющих в таких работах является нахождение и анализ обобщенного коэффициента теплообмена $N(t)$ решением обратных задач.

Постановка задачи.

Математическая модель задачи

$$C_p \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \qquad \theta\big|_{t=0} = \theta_0(z) \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=-h_1} = Y(t), \; \theta\big|_{z=H} = T_0, \tag{2}$$

$$[\theta]_{z=0} = 0, \; \left[\lambda \frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=0} = -N\theta(0,t) + NT_1(t) + F(t) \tag{3}$$

Дополнительно задается измеренное значение температуры воздуха на поверхности почвы

$$T_g(t), \; 0 < t \le t_{\max} \tag{4}$$

Будем определять $N(t)$.

Отрезок $(-h, H)$ разбиваем на N частей с шагом $\Delta z = \dfrac{H+h}{N_z}$. Предполагаем, что точка $z = 0$ попадает на целый узел $0 = -h + \Delta z k$, $k = \dfrac{h}{\Delta z}$ - целое число. Используя сетку

$W_{\Delta z} = \{(z_i, t_j : z_i = -h + i\Delta z,\ t_j = j\Delta t)\},$ $i = 0, 1,..., N_z;\ j = 0, 1,..., m;\ k\Delta z = h$ составляется интегральное равенство

$$C_p \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} dz \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t}\right) dz$$

или

$$C_p \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \left[\theta(z, t_{j+1}) - \theta(z, t_{j-1})\right] dz = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta\left(z_{i+\frac{1}{2}}, t\right)}{\partial z} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta\left(z_{i-\frac{1}{2}}, t\right)}{\partial z} \right] dz .$$

Применяя формулу интерполирования выводится разностное уравнение

$$C_p \frac{Y_i^{j+1} - Y_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta z}\left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{Y_{i+1}^{j+1} - Y_i^{j+1}}{\Delta z} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{Y_i^{j+1} - Y_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta z}\delta(i-k)\left[-N^{j+1}Y_k^{j+1} + N^{j+1}T_1^{j+1} + F^{j+1}\right] \tag{5}$$

$i = 1, 2,..., N-1.$

Здесь $\delta(i-k) = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k \\ 1, \text{ если } i = k. \end{cases}$

Функция N^{j+1} ищется итерационным способом. Задается начальное приближение $N^{j+1}(n)$. Следующее приближение определяется из монотонности функционала

$$J(N) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(Y_k^{j+1} - T_g^{j+1}\right)^2 \Delta t . \tag{6}$$

Пусть $Y_i^{j+1}(n)$ и $Y_i^{j+1}(n+1)$ являются решениями системы (5) при соответствующих значениях $N^{j+1}(n)$ и $N^{j+1}(n+1)$. Тогда для разности $\Delta Y_i^{j+1} = Y_i^{j+1}(n+1) - Y_i^{j+1}(n)$ составляется задача

$$C_p \frac{\Delta Y_i^{j+1} - \Delta Y_i^j}{\Delta t} = \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \Delta Y_{iz}^{j+1}\right)_{\bar{z}} + \frac{1}{\Delta z}\delta(i-k)\left[-\Delta N^{j+1}Y_k^{j+1}(n+1) - N^{j+1}(n) + \Delta N^{j+1}T_1^{j+1}\right], \tag{7}$$

$i = 1, 2,..., N_z;$

$$\Delta Y_i^0 = 0,\ i = 0, 1,..., N_z; \tag{8}$$

$$\Delta Y_0^{j+1} = 0,\ \Delta Y_{N_z}^{j+1} = 0,\ i = 0, 1,..., m-1. \tag{9}$$

Умножим (7) на произвольную сеточную функцию U_i^j и просуммируем по i от 1 до N_{z-1}, по j от 0 до $m-1$. После однократного применения формулы суммирования по частям

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Delta Y_{i\bar{z}}^{j+1} U_i^j \Delta t = \Delta Y_i^0 U_i^0 - \Delta Y_i^m U_i^m - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta Y_i^{j+1} U_{i\bar{z}}^{j+1} \Delta t,$$

$$\sum_{i=0}^{N_{z-1}}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\Delta Y_{iz}^{j+1}\right)_{\bar{z}}U_i^j\Delta z=\lambda_{N_z-\frac{1}{2}}\Delta Y_{N_{\bar{z}}}^{j+1}U_N^j-\lambda_{\frac{1}{2}}\Delta Y_{1,\bar{z}}^{j+1}U_0^j-\sum_{i=1}^{N_z}\lambda_{i-\frac{1}{2}}Y_{i\bar{z}}^{j+1}U_{i\bar{z}}^j\Delta z$$

выводим

$$\begin{aligned}&-C_p\sum_{i=1}^{N_{z-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_i^{j+1}U_{i,\bar{t}}^{j+1}\Delta t\Delta z+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{N_z}\Delta Y_{i\bar{z}}^{j+1}\lambda_{i-\frac{1}{2}}U_{i\bar{z}}^j\Delta t\Delta z=\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\left[-\Delta N^{j+1}Y_k^{j+1}(n+1)-N^{j+1}(n)\Delta Y_k^{j+1}+\Delta N^{j+1}T_1^{j+1}\right]U_k^j\Delta t.\end{aligned}\tag{10}$$

При этом мы принимаем следующие условия для сеточной функции U_i^j :

$U_i^0=0,\ i=0,1,...,N_z;$

$U_0^{j+1}=0,\ U_{N_z}^{j+1}=0,\ j=0,1,...,m-1.$

Еще раз применяя формулу суммирования по переменной i из равенства (10) выводится соотношение:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N_{z-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_i^{j+1}\left[C_pU_{i,\bar{t}}^{j+1}+\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}U_{iz}^j\right)_{\bar{z}}\right]h\Delta t=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta N^{j+1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t=\\&=\sum_{j=0}^{m-1}N^{j+1}\Delta Y_k^{j+1}U_k^j\Delta t-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_k^{j+1}\Delta N^{j+1}U_k^j\Delta t.\end{aligned}$$

Предполагаем, что

$$C_pU_{i,\bar{t}}^{j+1}+\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}U_{iz}^j\right)_{\bar{z}}=0;\ i=1,2,...,N_{z-1};\ j=0,1,...,m-1.\tag{11}$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1}N^{j+1}\Delta Y_k^{j+1}U_k^j\Delta t=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta N^{j+1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_N^{j+1}\Delta N^{j+1}U_k^j\Delta t.\tag{12}$$

Поставим внутреннее граничное условие для сопряженной задачи

$$N^{j+1}U_k^j=2\left(Y_k^{j+1}-T_g^{j+1}\right)\tag{13}$$

Тогда из (12) выводится равенство

$$2\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_k^{j+1}-T_g^{j+1}\right)\Delta Y_k^{j+1}\Delta t=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta N^{j+1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_N^{j+1}\Delta N^{j+1}U_k^j\Delta t.\tag{14}$$

С другой стороны

$$J_{n+1}\left(N^{j+1}\right)-J_n\left(N^{j+1}\right)=2\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_k^{j+1}-T_g^{j+1}\right)\Delta Y_k^{j+1}\Delta t+\sum_{j=0}^{m-1}\left(\Delta Y_k^{j+1}\right)^2\Delta t.$$

Учитывая (14) запишем, что

$$J_{n+1}\left(N^{j+1}\right)-J_n\left(N^{j+1}\right)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta N^{j+1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t-$$
$$-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta Y_N^{j+1}\Delta N^{j+1}U_k^j\Delta t+\sum_{j=0}^{m-1}\left(\Delta Y_k^{j+1}\right)^2\Delta t. \qquad (15)$$

1. Если $N^{j+1}=const,$ то полагая $\Delta N^{j+1}=N(n+1)-N(n)=\gamma_n\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t$, можно получить монотонность функционала, т.е. $J_{n+1}<J_n,\ n=0,1,...$

2. Если $N^{j+1}=A_0t_{j+1}^3+A_1t_j^2+A_2t_j+A_3$, то полагая

$$A_0(n+1)-A_0(n)=\gamma_0\sum_{j=0}^{m-1}t_{j+1}^3\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,\ A_1(n+1)-A_1(n)=\gamma_1\sum_{j=0}^{m-1}t_{j+1}^2\left(Y_N^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,$$

$$A_2(n+1)-A_2(n)=\gamma_2\sum_{j=0}^{m-1}t_{j+1}\left(Y_N^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,\ A_3(n+1)-A_3(n)=\gamma_3\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_N^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t$$

можно добиться монотонности функционала J_n.

3. Если функция $N(t)$ интерполируется в следующем виде

$N(t)=N_0+\sum_{s=1}^{e}\left(M_s\cos\frac{\pi\cdot t\cdot s}{w}+P_s\sin\frac{\pi\cdot t\cdot s}{w}\right)$, то соответственно итерационные формулы принимают вид

$$N_0(n+1)=N_0(n)+\gamma_0\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,$$

$$M_s(n+1)-M_s(n)=\gamma_s(n)\sum_{j=0}^{m-1}\cos\frac{\pi\cdot t_j\cdot s}{w}\left(Y_k^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,$$

$$P_s(n+1)-P_s(n)=M_s(n)\sum_{j=0}^{m-1}\sin\frac{\pi\cdot t_j\cdot s}{w}\left(Y_N^{j+1}-T_1^{j+1}\right)U_k^j\Delta t,,\ \text{где}\ s=1,\ 2,...,e.$$

Структурный алгоритм расчета

1-шаг. Ввод исходной информации:

$$h,\ k,\ \theta_0(z),\ t_{\max},\ C_p,\ h_1,\ T_1(t),\ F(t),\ Y(t),\ \lambda\ .$$

2-шаг. Задается начальное приближение $N(n)$, $n=0$.

3-шаг. Выбирается N_z таким образом, чтобы имело место равенство $h=k\Delta z$, где $\Delta z=\frac{H+h}{N_z}$.

4-шаг. Решается система (5) с граничными условиями (2) и определяется $Y_k^{j+1}(n)$, $j=0,1,...,m-1$.

5-шаг. Решается сопряженная задача (16) и определяется $U_k^j(n)$, $j=m-1,m-2,...,0$.

6-шаг. Определяется следующее приближение $N(n+1)$ таким образом, чтобы имело место неравенство $J_{n+1}(N) < J_n(N)$, и положим $n = n+1$.

7-шаг. Проверяем условие $J_{n+1}(N) < \varepsilon$. Если не выполняется, то переходим к 4-му шагу, в противном случае переходим к следующему шагу.

8-шаг. Вывести N и $Y_i^{j+1}(n+1)$. Обратная задача решена с точностью ε.

Литература:

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - С. 600 с.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. - М.: Издательство физико-математической литературы, 1982. - С. 456.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. - Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. - С. 628.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.