Аблабеков Б.С., Дурмонбаева З.А.

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС БЕНДЖАМИН-БОНА-МАХОНИ-БЮРГЕРС ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Дурмонбаева З.А.

О РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМИНА-БОНА-МАХОНИ-БЮРГЕРСА

B.S Ablabekov, Z.A. Durmonbaeva

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION OF BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS

УДК: 517.95

Бул иште сызыктуу эмес Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдемеси үчүн экинчи түрдөгү чектик маселесинин чыгарымдуулугу изилденген. Коюлган маселе үчүн Вольтеррдин оператордук теңдемелер ыкмасын колдонуп бир маанилүү чыгарымдуулук жөнүндөгү теорема далилденди.

***Негизги сөздөр:** чектик маселе, Бенджамин-Бона-Махони-Бюргерс теңдемеси, Вольтеррдин оператордук теңдемелер ыкмасы.*

В работе исследованы вопрос об однозначной разрешимости второй краевой для уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса. Методом операторных уравнений Вольтерра доказаны соответствующие теоремы об однозначной разрешимости рассматриваемых задач.

***Ключевые слова:** начально-краевые задачи, уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса, метод операторных уравнений Вольтерра.*

The problem of unique solvability of the second boundary value for the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation is investigated. By the method of Volterra operator equations, the corresponding theorems on the unique solvability of the problems under consideration are proved.

***Key words:** initial-boundary value problems, equation of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, method of Volterra operator equations.*

Введение. В работах [1,3] для одномерного уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса были исследованы задача Коши и краевая задача с граничными условиями первого рода, а в работе [2] рассмотрена обратная задача определения правой части по переопределению во внутренней точке.

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости второй краевой задачи для одномерного нелинейного уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса и установлены достаточные условия, при которых решение краевой задачи (1)-(4) существует и единственно.

Введем необходимые функциональные пространства

$$C_0^1([0,l]) = \{y(x) \in C^1([0,l]) \,|\, y'(0) = y'(l) = 0\}, \quad \|y\|_{C_0^1} = \max_{0\le x\le l}|y(x)| + \max_{0\le x\le l}|y'(x)|,$$

$$C_0^2([0,l]) = \{y(x) \in C^2([0,l]) \,|\, y'(0) = y'(l) = 0\}, \quad \|y\|_{C_0^2} = \max_{0\le x\le l}|y(x)| + \max_{0\le x\le l}|y'(x)| + \max_{0\le x\le l}|y''(x)|.$$

Нетрудно заметить, что пространства $C_0^1([0,l])$, $C_0^2([0,l])$ полны относительно выбранных норм как замкнутые подпространства пространств $C^1([0,l])$ $C^2([0,l])$ соответственно.

Пусть $\Omega_T = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$, $\quad l, T = const > 0$.

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим задачу вторую краевую задачу для нелинейного уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где функция $u_0(x)$ заданы и удовлетворяет условиям согласования

$$u_0'(0)=0\ ,\ u_0'(l)=0\,. \qquad (4)$$

Целью данной работы является методом полуобращения (см.[3]) доказать теорему существования и единственности решения задачи (1)-(3).

Определение 1. Решением краевой задачи (1) - (3) назовем функцию $u(x,t)\in C^{(2,1)}(\Omega_T)\bigcap C(\overline{\Omega}_T)$, удовлетворяющая уравнению (1), условиям (2) и (3).

Справедлива

Теорема 1. Пусть $u_0(x)\in C^2(0,l)\bigcap C^1([0,l])$ и выполнены условия согласования (4). Тогда при любом достаточно малом $T_0>0$ на отрезке $[0,T]$ существует единственное решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Введём непрерывный оператор $L:C_0^2\to C,$

где $Ly=y_{xx}-y$.

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(Lu)+u_{xx}+uu_x=0. \qquad (5)$$

Как и в работе [3,4], используя метод полу обращения и функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} Ly=y_{xx}-y=f(x), 0\le x\le l,\\ y'(0)=y'(l)=0,\end{cases}$$

можно показать, что оператор $L:C_0^2\to C$ имеет непрерывный обратный $L^{-1}:C\to C_0^2$, который можно выписать явно:

$$(L^{-1}f)(x)=\int_0^l G(x,s)f(s)ds\,. \qquad (6)$$

Функция Грина $G(x,s)$ имеет вид

$$G(x,s)=\frac{1}{e^2-1}\begin{cases} shx\left(e^s+e^{2-s}\right), 0\le x\le s,\\ shs\left(e^x+e^{2-x}\right), s\le x\le l.\end{cases}$$

Непрерывность оператора $L^{-1}:C\to C_0^2$ можно легко проверить непосредственно для явно выписанной функции Грина.

Так как операторы L и $\frac{d}{dt}$ коммутируют между собой (см. [4]), поэтому уравнение (5) может быть переписано в виде

$$L\left(\frac{du}{dt}\right)+u_{xx}+uu_x=0. \qquad (7)$$

Отсюда, обратный оператор $L^{-1}=G$, уравнение (7) можно переписать в виде операторного уравнения

$$\frac{du}{dt}+G(u_{xx})+G(uu_x)=0$$

с нулевыми граничными условиями второго рода на концах интервала $(0,l)$.

Учитывая, что $G(u_{xx})=G(u_{xx}-u+u)=u+Gu$, последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{du}{dt}+u+Gu+G(uu_x)=0.$$

Таким образом, функция $u(x,t)\in C^1([0,T]);C_0^1)$ является решением задачи (1)-(3) тогда и только тогда функция $u(x,t)\in C^1([0,T]);C_0^1)$ является решением задачи Коши

$$\frac{du}{dt}+u+Gu+G(uu_x)=0,\quad u(x,0)=u_0(x)\in C_0^2. \tag{8}$$

Задачу (8) сведем к следующему интегральному уравнению

$$u(x,t)=u_0(x)e^{-t}-\int_0^t e^{-(t-\tau)}\left[Gu+G(uu_x)\right](x,\tau)d\tau$$

или

$$u(x,t)=u_0(x)e^{-t}-\int_0^t\int_0^l G(x,s)e^{-(t-\tau)}\left[u(s,\tau)+2^{-1}\left(u^2(s,\tau)\right)_s\right]dsd\tau. \tag{9}$$

Так как

$$G(uu_x)=2^{-1}\int_0^l G(x,s)\left(u^2(s,t)\right)_s ds=\frac{2^{-1}}{e^2-1}\int_0^x shs\left(e^x+e^{2-x}\right)\left(u^2(s,t)\right)_s ds+$$

$$+\frac{2^{-1}}{e^2-1}\int_x^l shx\left(e^s+e^{2-s}\right)\left(u^2(s,t)\right)_s ds=\frac{2^{-1}}{e^2-1}\left[shx\left(e^x+e^{2-x}\right)u^2(x,t)-\int_0^x chs\left(e^x+e^{2-x}\right)u^2(s,t)ds\right]+$$

$$+\frac{2^{-1}}{e^2-1}\left[-shx\left(e^x+e^{2-x}\right)u^2(x,t)+\int_x^l shx\left(e^s-e^{2-s}\right)u^2(s,t)ds\right]=$$

$$+\frac{2^{-1}}{e^2-1}\left[\int_0^x chs\left(e^x-e^{2-x}\right)u^2(s,t)ds+\int_x^l shx\left(e^s-e^{2-s}\right)u^2(s,t)ds\right]=\frac{2^{-1}}{e^2-1}\int_0^l G_s(x,s)u^2(s,t)ds,$$

то

$$u(x,t)=u_0(x)e^{-t}-\int_0^t\int_0^l (G(x,s)+G_s(x,s))e^{-(t-\tau)}\left[u(s,\tau)+2^{-1}\left(u^2(s,\tau)\right)_s\right]dsd\tau. \tag{10}$$

Таким образом, относительно функции $u(x,t)$ получили нелинейное интегральное уравнение Вольтерра-Фредгольма второго рода. Несложно показать, что оператор стоящий в правой части (10) является непрерывным из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$ и является сжимающим при некотором малом $T_0>0$. Тогда согласно принципу сжимающих отображений уравнение (10) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Кроме того, при условиях теоремы 1, можно показать, что решение интегрального уравнение (10) удовлетворяют условиям (1)-(3).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Используя методику работы [4] можно доказать глобальную разрешимость задачи (1)-(3).

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - С. 183.
2. Аблабеков.Б.С., Дурмонбаева З.А. Обратная задача определения правой части в нелинейном псевдопараболическом уравнении Бенджамина-Бона - Махони-Бюргерса // Вестн. КазНПУ им. Абая. Сер. ф.-м.н., №3(43). - Алматы, 2013. - С. 3-6.
3. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии. - 1999. - №4. - С. 12-19.
4. Корпусов М.О., Панин А.А. Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса с нелокальным граничным условие // ТМФ, 2013, том 175, №2. - С. 159-172.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Усенов И.А.