ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА №8, 2017

Алиева А.Р.

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЭКИ КИЧИНЕ ПАРАМЕТРИ ҮЧҮН КОШИНИН МАСЕЛЕСИ

Алиева А.Р.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

A.R. Alieva

THE CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER WITH TWO SMALL PARAMETERS

УДК: 517.955

Жалпы теориядагы көптөгөн физикалык маселелерде параметри кичине болгон сингулярдык козголгон маселелердин пограндык катмар функциясынын негизинде асимптотикалык мүнөздөгү чыгарылыштары алынганы белгилүү [1-3]. Бул иште чектелбеген областта эки параметри кичине болгон сингулярдык козголгон маселелерди Коши шарттары менен изилдейбиз [4,8], муну менен кичине параметр нөлгө умтулгандагы сингулярдык козголгон жана кубулган маселелердин $L_h^2(D)$ *мейкиндигиндеги чыгарылышынын жакындыгы далилденүүдө.*

Негизги сөздөр: *сингулярдык козголгон маселе, интегралдануучу функция, кубулган маселе, кичине параметр, жалгыздык чыгарылыш, интегралдык оператор.*

Известны многочисленные физические задачи в общей теории сингулярно-возмущенных задач с одним малым параметром, где на основе метода погранслойной функции получены решения асимптотического характера [1-3]. В настоящей работе исследуем сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение с двумя малыми параметрами с условием Коши в неограниченной области [4,8], при этом доказывается близости решений сингулярно-возмущенной и вырожденной задачи в пространстве $L_h^2(D)$*, когда малый параметр стремится к нулю.*

Ключевые слова: *сингулярно-возмущенная задача, интегрируемая функция, вырожденная задача, малый параметр, единственное решение, интегральный оператор.*

Numerous physical problems in the general theory of singular perturbed problems with one small parameter were known. On the basis of a method of boundary layer functions solutions of asymptotic character are obtained [1-3]. In the work we investigate the singular perturbed integro-differential equation with two small parameters with Cauchy's condition in an unbounded domain [4,8], thus it is proved to proximity of solutions of the singular perturbed and degenerate problems in space $L_h^2(D)$ *when small parameter tends to zero.*

Key words: *singularly perturbed problem, degenerate problem, integrable function, degenerate problem, unique solution, small parameter, integral operator.*

Введение.

Отметим, что в теории сингулярно-возмущенных задач уравнения с двумя и более малыми параметрами были исследованы в работах [4,8] и др. Например, в работе [8] исследованы уравнения с двумя параметрами, когда $\rho^{-1}A_\tau = \varepsilon$ - кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости $\mu = \rho^{-1}\nu$ ламинарного течения (A_τ - коэффициент турбулентного обмена). При этом существуют определенные трудности выбора тех или иных пространств, где должны быть доказаны устойчивости изучаемых задач.

Поэтому, в данной статье построено решение асимптотического характера сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с двумя малыми параметрами, при выполнении условий разрешимости вырожденных задач в пространстве Чебышевской нормой [5]. Оценка близости решений сингулярно-возмущенных и вырожденных задач получены в пространстве $L_h^2(D)$ при стремлении малого параметра к нулю [6].

С этой целью, рассмотрим сингулярно-возмущенную задачу вида:

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2 u_{tx}(t,x)+\varepsilon_1\beta u_t(t,x)+\varepsilon_2\alpha u_x(t,x)+\alpha\beta u(t,x)=f(t,x)+\lambda Ku, \\ Ku\equiv\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)(u(t,\tau))^2d\tau, \\ D=\{(t,x):t\in[0,T],x\in R\};\ \ (x,\tau)\in D_1=D\times D, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(0,x)=\vartheta(0,x)+b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\forall x\in R, \tag{2}$$

где в пространстве $L_h^2(D)$, требуется априорная информация вида

$$\begin{cases} b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\not\to 0,\ \text{ когда }\ \varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0,\forall x\in R, \\ |b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\le m_0<\infty,\ \ \forall x\in R, \\ \|b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|_{L^2(R)}=(\int\limits_R |b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2d\tau)^{\frac12}\le m_1\varepsilon_2^{\gamma}, \\ 0<\gamma<1;\ 0<m_i=const,(i=0,1), \end{cases}$$

$0<\alpha,\beta,\lambda=\text{const}$, $(0,1)\ni\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – малые параметры, $f,K,b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in C^1(R)-$ заданные данные, при этом $C^{1,1}(D)\ni f(t,x)-$ ограниченная функция в области D; $0\le K(t,x,s,\tau)\in C^{1,1,0,0}(D_1)$ и интегрируемая функция по (s,τ) в D, причем

$$\begin{cases} (\sup\limits_D\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s,\tau)|^2d\tau ds)^{\frac12}\le C_1, \\ K(t,x,s,\tau)\le K_0=\text{const},\forall(t,x,s,\tau)\in D_1, \\ \sup\limits_D\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s,\tau)|d\tau ds\le C_2,\ \ (\text{C}_0=\max(C_1,C_2),C_i=\text{const},\ i=1,2). \end{cases}$$

I. Если $\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0$, то из (1) следует вырожденное уравнение вида

$$\vartheta=(\alpha\beta)^{-1}[f(t,x)+\lambda K\vartheta]\equiv B\vartheta,\forall(t,x)\in D. \tag{3}$$

Поэтому, при условиях

$$d=2\lambda(\alpha\beta)^{-1}r_0C_0\le\lambda C_0[2r_0(\alpha\beta)^{-1}+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac12}m_1+2r_1(\alpha\beta)^{-2}]<1, \tag{4}$$

$$\begin{cases} B : S_r(\vartheta_0) \to S_r(\vartheta_0), \\ S_r(\vartheta_0) = \{\vartheta : \left|\vartheta - \vartheta_0\right| \le r, \forall (t,x) \in D\};\ \left|\vartheta\right| \le r_0, \forall (t,x) \in D \end{cases} \tag{5}$$

уравнение (3) разрешимо в $C^{1,1}(D)$, тогда решение уравнение (3) строим методом Пикара

$$\vartheta_{n+1} = (\alpha\beta)^{-1}[f(t,x) + K\vartheta_n] \equiv B\vartheta_n, \forall (t,x) \in D, (n = 0,1,...) \tag{6}$$

с оценкой погрешности

$$\begin{cases} \left\|\vartheta_{n+1} - \vartheta\right\|_C \le d\left\|\vartheta_n - \vartheta\right\|_C \le ... \le d^{n+1}\left\|\vartheta - \vartheta_0\right\|_C \le d^{n+1} r \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} 0, \\ \vartheta\big|_{t=0} = \vartheta(0,x), \forall x \in R. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\vartheta_n\}_0^\infty$ сходится к пределу $\vartheta, \forall (t,x) \in D$.

Лемма 1. В условиях (4), (5) уравнение (3) разрешимо в $C^{1,1}(D)$, причем решение этого уравнение строится, как предел последовательности $\{\vartheta_n\}_0^\infty$ с оценкой погрешности (7).

II. Далее, решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\begin{cases} u(t,x) = \vartheta(t,x) + \Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi)(t,x), \forall (t,x) \in D, \\ \Pi\big|_{t=0} = b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2), x \in R, \\ u(0,x) = \vartheta(0,x) + b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2), x \in R, \\ (\Im\xi)(t,x) \equiv \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds, \end{cases} \tag{8}$$

$\vartheta(t,x)$ – решение вырожденного уравнения (3), $\Pi -$ функция типа погранслоя, $\Im$ - линейный интегральный оператор, содержащий неизвестную остаточную функцию $\xi(t,x)$. Для определения неизвестных функций $\Pi(t,x,\varepsilon), \xi(t,x)$ выражение (8) и

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \vartheta_t(t,x) + \Pi_t + (\Im\xi)_t;\ u_x(t,x) = \vartheta_x(t,x) + \Pi_x + (\Im\xi)_x, \\ u_{tx}(t,x) = \vartheta_{tx}(t,x) + \Pi_{tx} + (\Im\xi)_{tx}, \\ (\Im\xi)_t = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)}\xi(t,\tau)d\tau - \dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds, \\ (\Im\xi)_x = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)}\xi(s,x)ds - \dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds, \\ (\Im\xi)_{tx} = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\xi(t,x) - \dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)}\xi(t,\tau)d\tau - \dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)}\xi(s,x)ds + \\ +\dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\displaystyle\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds \end{cases} \tag{9}$$

подставляя в (1), имеем

$$\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2\{\vartheta_{tx}(t,x)+\Pi_{tx}(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\xi(t,x)-\dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)}\xi(t,\tau)d\tau- \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)}\xi(s,x)ds+\dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds\}+ \\ +\varepsilon_1\beta\{\vartheta_t(t,x)+\Pi_t(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)}\xi(t,\tau)d\tau- \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_1}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds\}+\varepsilon_2\alpha\{\vartheta_x(t,x)+\Pi_x(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+ \\ +\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)}\xi(s,x)ds-\dfrac{\beta}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds\}+\alpha\beta\{\vartheta(t,x)+ \\ +\Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds\}+\alpha\beta(\vartheta(t,x)+\Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+ \\ +\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds)=f(t,x)+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)(\Im\xi)(s,\tau)+ \\ +2\Pi(s,\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)(\Im\xi)(s,\tau)d\tau+((\Im\xi)(s,\tau))^2]d\tau ds. \end{cases} \tag{10}$$

Так как функция $\Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ единственным образом определяется из задачи

$$\Pi_t(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\frac{\alpha}{\varepsilon_1}\Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0, \tag{11}$$

$$\Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\big|_{t=0}=b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\forall x\in R, \tag{12}$$

т.е.

$$\begin{cases} \Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon_1}}b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\forall(t,x)\in D, \\ \|\Pi\|_{L_h^2(D)}\le(\sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t\int\limits_R e^{-2\frac{\alpha s}{\varepsilon_1}}h(\tau)|b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}}\le m_2\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\varepsilon_2}^{\gamma}=\Delta_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0, \\ 0<\gamma<1;\quad m_2=(2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tilde{h}_0}m_1;\ \ 0\le h(x)\le\tilde{h}_0<\infty:\ \ \int\limits_R h(\tau)d\tau\le h_0<\infty, \end{cases} \tag{13}$$

является точным решением задачи (11), (12) .

Далее, учитывая (3) и (13) из (10) следует

$$\xi(t,x)=\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_0^s\int_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi(s',\tau')d\tau'ds'+$$
$$+2e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_0^s\int_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi(s',\tau')d\tau'ds'+ \tag{14}$$
$$+(\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_0^s\int_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi(s',\tau')d\tau'ds')^2]d\tau ds+\Upsilon(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,x)\equiv(H\xi)(t,x),$$

где

$$\begin{cases}\Upsilon(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,x)\equiv\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)\Pi(s,\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(\Pi(s,\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2]d\tau ds-\\
-\varepsilon_1\varepsilon_2[\vartheta_{tx}(t,x)+\Pi_{tx}(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]-\varepsilon_1\beta\vartheta_t(t,x)-\varepsilon_2\alpha[\vartheta_x(t,x)+\Pi_x(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]=\\
=\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2]d\tau ds-\varepsilon_1\varepsilon_2[\vartheta_{tx}(t,x)-\\
-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}t}b_{0x}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]-\varepsilon_1\beta\vartheta_t(t,x)-\varepsilon_2\alpha[\vartheta_x(t,x)+e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}t}b_{0x}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]=\\
=\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2]d\tau ds-\varepsilon_1\varepsilon_2\vartheta_{tx}(t,x)-\\
-\varepsilon_1\beta\vartheta_t(t,x)-\varepsilon_2\alpha\vartheta_x(t,x),\\
|\Upsilon(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\le\lambda[2r_0(2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}(\sup_D\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s,\tau)|^2d\tau ds)^{\frac{1}{2}}(\int_{-\infty}^{\infty}|b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}}+\\
+K_0 2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1((\int_{-\infty}^{\infty}|b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}})^2]+\tilde r_0(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\beta+\varepsilon_2\alpha)\le\lambda[2r_0(2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}C_1m_1\varepsilon_2^{\gamma}+\\
+K_0 2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1(m_1\varepsilon_2^{\gamma})^2]+\tilde r_0(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\beta+\varepsilon_2\alpha)=\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0]{}0,\ \forall(t,x)\in D,\\
|\vartheta_{tx}^{(i)}(t,x)|\le\tilde r_0,\ \forall(t,x)\in D,(i=1,2).\end{cases} \tag{15}$$

Пусть оператор H допускает условия принципа Банаха [7], т.е.

$$\begin{cases}\lambda C_0[2r_0(\alpha\beta)^{-1}+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}m_1+2r_1(\alpha\beta)^{-2}]L_H<1,\\
H:S_{r_1}(0)\to S_{r_1}(0),(\xi_0=0),\end{cases} \tag{16}$$

где

$$\begin{cases} S_{r_1}(0)=\{\xi:|\xi|\le r_1,\forall(t,x)\in D\},\\ |\xi_2(t,x)-\xi_1(t,x)|\le|\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_2(s',\tau')d\tau'ds'+\\ +2e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_2(s',\tau')d\tau'ds'+\\ +(\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_2(s',\tau')d\tau'ds')^2]d\tau ds+\Upsilon(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,x)-\{|\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)\times \end{cases}$$

$$\begin{cases} \times[2\vartheta(s,\tau)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_1(s',\tau')d\tau'ds'+2e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon_1}s}b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\times\\ \times\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_1(s',\tau')d\tau'ds'+(\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(s-s')+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(\tau-\tau')]}\xi_1(s',\tau')d\tau'ds')^2]d\tau ds+\\ +\Upsilon(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t,x)\}|\le\lambda[2r_0(\alpha\beta)^{-1}C_2+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}C_1m_1\varepsilon_2^{\gamma}+2r_1(\alpha\beta)^{-2}C_2]\times\\ \times\|\xi_2(t,x)-\xi_1(t,x)\|_C\le\lambda C_0[2r_0(\alpha\beta)^{-1}+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}m_1\varepsilon_2^{\gamma}+2r_1(\alpha\beta)^{-2}]\times\\ \times\|\xi_2-\xi_1\|_C\le\lambda C_0[2r_0(\alpha\beta)^{-1}+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}m_1+2r_1(\alpha\beta)^{-2}]\|\xi_2-\xi_1\|_C=L_H\|\xi_2-\xi_1\|_C,\\ \lambda<(C_0[2r_0(\alpha\beta)^{-1}+2(\alpha\beta)^{-1}(2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}m_1+2r_1(\alpha\beta)^{-2}])^{-1},\ (0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1). \end{cases}$$

Тогда нелинейное уравнение (14) разрешимо в $C(D)$, причем

$$\sup_D|\Upsilon(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\le\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0]{}0,\ \forall(t,x)\in D. \tag{17}$$

Лемма 2. В условиях леммы 1 и (13), (16) и (17) функция $\xi(t,x)$ определяется единственным образом в $C(D)$, причем следует

$$\|\xi(t,x)\|_C=(1-L_H)^{-1}\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0]{}0. \tag{18}$$

Теорема 1. Если выполняются условия леммы 2, то исходная сингулярно-возмущенная задача (1), (2) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, представляемое в виде (8) и при этом оценка близости решений уравнений (1), (3) устанавливается в $L_h^2(D)$ по правилу

$$\begin{cases} \|u(t,x)-\vartheta(t,x)\|_{L_h^2}\le N_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0]{}0,\\ N_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\sqrt{2}[2^{-1}a^{-1}\varepsilon_1\tilde{h}_0(m_1\varepsilon_2^{\gamma})^2+(\alpha\beta)^{-2}(\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2h_0T]^{\frac{1}{2}},\\ 0\le h(x)\le\tilde{h}_0<\infty:\int\limits_R h(\tau)d\tau\le h_0<\infty. \end{cases} \tag{19}$$

Замечание 1. Если $K(t,x,s,\tau)\equiv0$, то (1) переходит в дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 u_{tx}(t,x)+\varepsilon_1\beta u_t(t,x)+\varepsilon_2\alpha u_x(t,x)+\alpha\beta u(t,x)=f(t,x), \tag{20}$$

с условием (2). Значит, вырожденная задача имеет вид

$$\vartheta=(\alpha\beta)^{-1}f(t,x)\equiv\Phi(t,x), \tag{21}$$

$$\vartheta(t,x)\big|_{t=0}=\vartheta(0,x)\equiv\Phi(0,x), \tag{22}$$

а это означает, что функция $\Phi(t,x)\in C^{1,1}(D)$ точное решение уравнения (21) с условием (22). Поэтому, учитывая (8), (13), (14) имеем

$$\begin{cases} u(t,x)=\vartheta(t,x)+e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon_1}}b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{-[\frac{\alpha}{\varepsilon_1}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon_2}(x-\tau)]}\xi(s,\tau)d\tau ds, \\ \Pi(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon_1}}b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \\ \xi(t,x)=\Upsilon_1(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0]{}0,\forall(t,x)\in D, \\ \Upsilon_1(t,x,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\equiv\varepsilon_1\varepsilon_2\Phi_{tx}(t,x)-\varepsilon_1\beta\Phi_t(t,x)-\varepsilon_2\alpha\Phi_x(t,x). \end{cases} \tag{23}$$

Отсюда следует, на основе выводов леммы 2 и теоремы 1 получим оценку вида (19).

Литература:

1. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в сингулярно-возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. уравнения. - 1979, Т. 15. - Вып. 10. - С. 1848-1862.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. - Москва: Наука, 1973. - С. 272.
3. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. - Фрунзе: Илим, 1977. - С. 348.
4. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Теоретическая физика: Т.6. Гидродинамика. - Москва.: Наука, 1988. - С. 736.
5. Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса // ИТ и ПМ НАН КР. - Бишкек: Илим, 2010. - С. 116.
6. Омуров Т.Д., Алиева А.Р. Задача Коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области // Приволжский науч. вестник. - Ижевск, 2016. №12-1 (64). - С. 36-43.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. - Москва: Наука, 1980. - С. 496.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - Москва: Наука 1974. - С. 712.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.