Орозмаматова Ж.Ш.

ЖАРЫМ ОКТОГУ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО ЖАНА ТУРУКТУУЛУГУН БААЛОО

Орозмаматова Ж.Ш.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

Zh.Sh. Orozmatatova

THE REGULARIZATION AND EVALUATION OF STABILITY ESTIMATES SOLUTIONS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FREDGOLM OF THE FIRST KIND ON THE SEMIAXIS

УДК: 517.968

Макалада жарым октогу биринчи түрдөгү Фредгольмдун сызыктуу интегралдык теңдемелеринин айрым бир класстагы чыгарылышынын туруктуулугу бааланды жана регуляризациялоо оператору жөнүндөгү теорема далилденди.

Негизги сөздөр: *сызыктуу интегралдык теңдемелер, биринчи типтеги теңдемелер, чыгарылышынын жалгыздыгы, регуляризациялоочу операторлор, туруктуулукту баалоо.*

В данной статье построены регуляризирующие операторы теоремы единственности и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных уравнений первого рода Фредгольма на полуоси.

Ключевые слова: *линейные интегральные уравнения, уравнения первого рода, единственность решений, регуляризирующие операторы, оценка устойчивости.*

In this article on the basis of a method of regularizes operators uniqueness theorems and estimates of solutions stability for a class of linear integral equations of the first kind of Fredgolm on the semiaxis.

Key words: *linear integral equations, first kind equations, square forms uniqueness, semiaxis, regularization, evaluation of stability*

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty) \quad , \tag{1}$$

где $\int_a^\infty \int_a^\infty |K(t,s)|^2 dtds \le \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s) u\, f(t)$ данные функции, $u(t) -$ искомая функция. Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнение сводящиеся к ним ранее изучались частности в [1-5], где были получены теоремы единственности устойчивости и регуляризации. В данном случае, исследованы вопросы устойчивость и регуляризации в пространстве $L_2[a,\infty)$.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t) \qquad (3)$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t получим

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt \qquad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds = \int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$

т.е.

$$\int_a^\infty \int_a^t [A(t,s) + B(s,t)]u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt. \qquad (5)$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}[A(t,s) + B(s,t)], \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : a \le s \le t < \infty\}.$$

Тогда из (5) имеем

$$2\int_a^\infty \int_a^t H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt.$$

Из условия (2), вытекает, что

$$\int_a^\infty \int_a^t H^2(t,s)dtds < +\infty. \qquad (6)$$

Введём новую функцию $M(t,s)$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \qquad (7)$$

Ясно, что

$$M(t,s) = M(s,t), \quad (t,s) \in [a,\infty) \times [a,\infty).$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_a^\infty \int_a^\infty |M(t,s)|^2 dsdt < \infty.$$

Тогда, известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \tag{8}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ – характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots$ и $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\ldots$ - соответствующие ортонормированные собственные функции.

Теорема 1. Пусть $M(t,s)$ - полное ядро и $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $L_2[a,\infty)$ единственно.

Доказательство. Пусть уравнение (1) при $f(t)\equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t)\in L_2[a,\infty)$ т.е.

$$\int_a^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t)\equiv 0,$$ почти при всех $t\in[a,\infty)$.

Отсюда

$$2\int_a^{\infty}\int_a^{t}H(t,s)u(s)u(t)dsdt=0 \tag{9}$$

Учитывая (6), (7) и (8) из (9) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_i}\int_a^{\infty}\varphi_i(t)u(t)\int_a^{t}\varphi_i(s)u(s)dsdt=0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_a^{\infty}\varphi_i(t)u(t)dt\right|^2=0$$

Тогда

$$\int_a^{\infty}\varphi_i(t)u(t)dt=0,\quad (i=1,2\ldots)$$

Следовательно, $u(t)=0.$ Теорема 1 доказана.

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_v матричного ядра $M(t,s)$ положительны.

Семейство множеств корректностей, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in L_2[a,\infty):\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(v)} = \int_a^\infty u(t)\varphi_v(t)dt, \tag{10}$$

Ясно, что если $u(t) \in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|^2 \le c\lambda_1^{-\alpha}$$

, где

$$\|u(t)\| = \left(\int_a^\infty |u(t)^2| dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо.

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i}\left|\int_a^\infty u(t)\varphi_i(t)dt\right|^2 = \int_a^\infty f(t)u(t)dt.$$

Отсюда используя неравенства Гёльдера, имеем

$$\sum_{v=1}^\infty \lambda_v^{-1}\left|u^{(v)}\right|^2 \le \|f(t)\| \cdot \|u(t)\|. \tag{11}$$

С другой стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{|u_i|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\alpha |u_i|^2\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p = 1 + a, q = \dfrac{(1+\alpha)}{\alpha}$ Учитывая $u(t) \in M_\alpha$ и (2), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\|f(t)\|\|u(t)\|\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости.

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \qquad 0 < \alpha < \infty \tag{12}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть оператор М порожденным матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где $M(t,s)$ определен по формуле (8).Тогда на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1}, обратный K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \varepsilon>0 \tag{13}$$

будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α.

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (13)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in M_\alpha$ - решение уравнения (1), получим

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon\, u(t).$$

Умножая последнее уравнение на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, от α до +∞ учитывая (2) и (8) имеем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2+\sum_{v=1}^\infty \lambda_v^{-1}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\sum_{v=1}^\infty \left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right|, \tag{14}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$- коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi_v(t)\}$. т.е. $\xi_v(\varepsilon)=\int_a^\infty \xi(t,\varepsilon)\varphi_v(t)dt$,

Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\frac{1}{2}$, из (14) получим

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|\le\left\|u(t)\right\|, \tag{15}$$

$$\sum_{v=1}^\infty \lambda_v^{-1}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\left\|u(t)\right\|^2 \le \varepsilon c\lambda_1^{-\alpha},\ \varepsilon>0, \tag{16}$$

с другой стороны

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| = \sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_v(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha),\ m=2(1+\alpha),\ n=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\lambda_v^{-1}\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\lambda_v^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{\alpha}\left|u^{(v)}\right|^2\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее в силу $u(t)\in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{p+q}{pq}},$$

Отсюда, подставляя $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{17}$$

т.е.

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{\frac{-\alpha}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c\lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{1+\alpha}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем

$$\left\| u(t,\varepsilon) - u(t) \right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \qquad (19)$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Пусть оператор M порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где u(t, ε)-решение уравнение (13) u(t)-решение уравнение (1) $M(t,s)$ определен по формуле (8).

Литература:

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука 1980.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. - 1959. -Т. 127, №1. - С. 31-33.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР. - 1989. - Т. 309., №5. - С. 1052-1055.
4. Асанов А., Каденова З.А. О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Сам ГТУ, 2004. - Ч.3. - С.122-126.
5. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными. // Труды межд. конф. «Функциональный анализ и его приложения», посвящённую 70-летию со дня рождения д.ф.-м.н., академика Национальной Академии наук РК. М.Отелбаева, 2-5 октября 2012 г., г. Астана, Казакстан.
6. Asanov A., M.Haluk Chelik, Kadenova Z.A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables. // International journal of contemporary mathematical sciences Vol.7, 2013, no.19, 907- 914. HIKARI Ltd.
7. Asanov A., Kadenova Z.A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables.// Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia, - 2013, №3. - C. 30-36.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.