МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Орозмаматова Ж.Ш.

ОКТОГУ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН АЙРЫМ БИР КЛАССЫ ЖӨНҮНДӨ

Орозмаматова Ж.Ш.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Zh.Sh. Orozmatova

ABOUT ONE CLASS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FREDGOLM OF THE FIRST KIND THE AXIS

УДК: 517.968

Макалада октогу биринчи түрдөгү Фредгольмдун сызыктуу интегралдык теңдемелеринин айрым бир класстагы чыгарылышынын туруктулуугу бааланды жана регуляризациялоо оператору жөнүндөгү теорема далилденди.

Негизги сөздөр: *сызыктуу интегралдык теңдемелер, биринчи типтеги теңдемелер, чыгарылышынын жалгыздыгы, регуляризациялоочу операторлор, туруктуулукту баалоо.*

В данной статье построены регуляризирующие операторы теоремы единственности и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных уравнений первого рода Фредгольма на оси.

Ключевые слова: *линейные интегральные уравнения, уравнения первого рода, единственность решений, регуляризирующие операторы, оценка устойчивости.*

In this article on the basis of a method of non-negative square forms uniqueness theorems in one class for the linear integral equations of the first kind of Fredgolm in the axis are proved.

Key words *and phrases: linear integral equations, first kind equations, non-negative square forms uniqueness, axis.*

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dtds < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s) u\, f(t)$ данные функции, $u(t)-$ искомая функция. Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнение сводящиеся к ним ранее изучались частности в [1-5], где были получены теоремы единственности устойчивости и регуляризации. В данном случае, исследованы вопросы устойчивость и регуляризации в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)ds + \int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)ds = f(t) \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{s} B(t,s)u(s)u(t)dtds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt,$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \left[A(t,s) + B(s,t)\right]u(s)u(t)dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt. \tag{5}$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left[A(t,s) + B(s,t)\right], \quad (t,s) \in G = \{(t,s): -\infty < s \le t < \infty\}.$$

Тогда из (5) имеем

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Из условия (2), вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H^2(t,s)\,dsdt < +\infty. \tag{6}$$

Введём новую функцию $M(t,s)$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ H(s,t), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что

$$M(t,s) = M(s,t), \quad (t,s) \in R \times R.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|M(t,s)\right|^2 dsdt < \infty.$$

Тогда, известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \qquad (8)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t)\ldots$ - соответствующие ортонормированные собственные функции.

Теорема 1. Пусть $M(t,s)$ - полное ядро и $0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ единственно.

Доказательство. Пусть уравнение (1) при $f(t)\equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t)\in L_2(-\infty,\infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t)\equiv 0, \quad \text{почти при всех} \quad t\in(-\infty,\infty).$$

Отсюда

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(t,s)u(s)u(t)dsdt=0 \qquad (9)$$

Учитывая (6), (7) и (8) из (9) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(t)u(t)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(s)u(s)dsdt=0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(t)u(t)dt\right|^2=0$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(t)u(t)dt=0, \quad (i=1,2\ldots)$$

Следовательно, $u(t)=0$. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_ν матричного ядра $M(t,s)$ положительны.

Семейство множеств корректностей, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in L_2(-\infty,\infty): \sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^\alpha\left|u^{(\nu)}\right|^2\le c\right\},$$

где $c>0, \quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(v)}=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi_v(t)dt, \tag{10}$$

Ясно, что если $u(t)\in M_\alpha$, то

$\|u(t)\|^2 \le c\lambda_1^{-\alpha}$, где

$$\|u(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t)^2\right| dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

Будем предполагать, что $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t)\in M_\alpha$ и справедливо.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi_i(t)dt\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Отсюда используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-1}\left|u^{(v)}\right|^2 \le \|f(t)\|\cdot\|u(t)\|. \tag{11}$$

С другой стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}|u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}|u_i|^2\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=1+a, q=\dfrac{(1+\alpha)}{\alpha}$

Учитывая $u(t)\in M_\alpha$ и (2), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\|f(t)\|\|u(t)\|\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости.

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \qquad 0<\alpha<\infty \tag{12}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть оператор М порожденным матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где $M(t,s)$ определен по формуле (8). Тогда на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1}, обратный K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=f(t),\quad t\in(-\infty,\infty),\ \varepsilon>0 \tag{13}$$

будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α.

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (13)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in M_\alpha$ - решение уравнения (1), получим

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon\,u(t).$$

Умножая последнее уравнение на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, от -∞ до +∞ учитывая (2) и (8) имеем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2+\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-1}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right|, \tag{14}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$- коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi_v(t)\}$. т.е. $\xi_v(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t,\varepsilon)\varphi_v(t)dt$,

Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\frac{1}{2}$, из (14) получим

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|\le\left\|u(t)\right\|, \tag{15}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^{-1}\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\left\|u(t)\right\|^2\le\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha},\ \varepsilon>0, \tag{16}$$

с другой стороны

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|u^{(v)}\right|\left|\xi_v(\varepsilon)\right|=\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_v(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_v^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_v(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(v)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q = 2(1+\alpha), m = 2(1+\alpha), n = \dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty} \left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2 \lambda_v^{-1} \right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{\alpha} \left|u^{(v)}\right|^2 \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}} \left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}} \left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{v=1}^{\infty} \left|\xi_v(\varepsilon)\right|^2 \lambda_v^{-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{\alpha} \left|u^{(v)}\right|^2 \right)^{\frac{1}{q}} \left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}} \left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее в силу $u(t) \in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c \lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} \left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c \lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} (c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{p+q}{pq}},$$

Отсюда, подставляя $p = \dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q = 2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} (c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{1}{2}} (\varepsilon c \lambda_1^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{17}$$

т.е.

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} c^{\frac{1}{2}} c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \lambda_1^{\frac{-\alpha}{2}} \lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left|u^{(v)}\right| \left|\xi_v(\varepsilon)\right| \le c \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{1+\alpha}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем

$$\left\|u(t,\varepsilon) - u(t)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{19}$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Пусть оператор М порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где u(t, ε)-решение уравнение (13) u(t)-решение уравнение (1) $M(t,s)$ определен по формуле (8).

Литература:

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. ДАН СССР. - 1959. 127, №1. – С. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. ДАН СССР. - 1989. - Т.309. - №5. - С. 1052-1055.
4. Asanov A., M.Haluk Chelik, Kadenova Z.A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables.// International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.
5. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions Linear Equations of the First Kind with Two Variables.// Bulletin of Peoples Friendship of Russia. - Moscow, Russia, 2013, №3. - C. 30-36.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Асанов А.