Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б.

ЧЕКТЕГИ СЕКИРИКТЕРИ БАР СИНГУЛЯРДУУ ДҮҮЛҮККӨН ЧЕТТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТАРТИБИ

Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ СКАЧКАМИ

D.N. Nurgabyl, A.B. Uaisov

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH BOUNDARY WITH JUMPS

УДК: 517.928.2

Бул иште кошумча мүнөздөгүч теңдеменин тамырынын оң жакка анык бөлүктөрү карама-каршы белгиге ээ болгон учурда сингулярдуу дүүлүккөн четтик маселе изилденген. Сингулярдуу дүүлүккөн четтик маселе жалгыз чыгарылышка ээ боло турган жетишээрлик шарттар табылган. Адегенде бир тектүү теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы тургузулган, анда мүнөздөгүч теңдеменин тамырынын оң жакка анык бөлүктөрү карама-каршы белгиге ээ болгон учуру эске алынган. Андан ары, баштапкы функция, академик Касымов К.А. жана анын окуучулары жазган эмгекке окшоштурулуп түзүлгөн. Чектик функциялар, дал келген бир тектүү теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасынын жардамы менен тургузулган. Жумуштун аягында, табылган чыгарылыштардын интегралдык көрсөтүлүшү тургузулган жана чектик чекиттерде четтик маселенин чыгарылышы баштапкы секирик кубулушуна ээ экендиги далилденген жана да баштапкы секириктердин чоңдуктары аныкталган.

***Негизги сөздөр:** сингулярдуу дүүлүккөн четтик маселе, чыгарылыштардын фундаменталдык системасы, баштапкы секириктер, чыгарылыштардын асимптотикалык тартиби.*

В данной работе исследуется сингулярно возмущенная краевая задача при условии, что действительные части корней дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Найдены достаточные условия при которых неоднородная сингулярно возмущенная краевая задача имеет единственное решение. Сначала строятся фундаментальные системы решений соответствующего однородного уравнения, причем учитывается то, что действительные части корней дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Далее, построение начальной функции осуществляется по аналогии работы, выполненный академиком Касымовым К.А. и его учениками. Построение граничных функций осуществлено с помощью фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения. Наконец, построено интегральное представление решений и доказано, что в граничных точках найденное решение краевой задачи обладает явлением начальных скачков, причем определены величины начальных скачков.

***Ключевые слова:** сингулярно возмущенная краевая задача, фундаментальная система решений, начальные скачки, асимптотическое поведение решений.*

In the given work, the author researches the singularly perturbed boundary value problems under the condition that real parts of the roots of additional distinctive equation have opposite signs. First, the fundamental systems of solutions of the corresponding homogeneous equation are constructed, and it is taken into account that the real parts of the roots of the additional characteristic equation have opposite signs. Further, the construction of the initial function is carried out by analogy of the work performed by Academician Kasymov K.A. and his students. The construction of boundary functions is carried out with the help of the fundamental system of solutions of the corresponding homogeneous equation. Finally, an integral representation of the solutions is constructed and it is proved that at the boundary points the found solution of the boundary-value problem has the phenomenon of initial jumps, and the values of the initial jumps are determined.

***Key words:** singularly perturbed boundary value problem, fundamental system of solutions, initial jumps, asymptotic behavior of solutions.*

Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t), \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = a_0, \quad y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y'(1,\varepsilon) = a_2, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, a_0, a_1, a_2 – константы.

В [1,2] найдены асимптотические оценки решения уравнения (1) со следующими условиями

$$y(0,\varepsilon) = a_0, \quad y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y(1,\varepsilon) = a_2.$$

При этом корни дополнительного характеристического уравнения имели только отрицательные вещественные части. В данной работе исследуется краевая задача (1), (2) с более общим требованием, состоящей в том, что действительные части корней μ_2, μ_3 дополнительного характеристического уравнения удовлетворяют условия $\operatorname{Re}\mu_2 < 0, \operatorname{Re}\mu_3 > 0$.

Потребуем выполнения следующих условий:

I. Пусть $A(t), B(t), C(t) \in C^3([0,1])$, $F(t) \in C^1([0,1])$.

II. Пусть $B(t) \neq 0$ *при* $t \in [0,1]$.

III. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0 \tag{3}$$

имеет различные корни $\mu_1 = 0,\ \mu_2,\ \mu_3$, *причем* $\operatorname{Re}\mu_2 < 0, \operatorname{Re}\mu_3 > 0$.

IV. Пусть:

$$a_0 C(0) + a_1 B(0) \neq F(0),$$

$$\left[a_0 \exp\left(-\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) + \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} \exp\left(-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) ds \right] \cdot C(1) + a_2 B(1) \neq F(1),$$

Изучения решения сингулярно возмущенных краевых задач оказываются полезными при рассмотрении различных прикладных задач. Вместе с тем, исследование сингулярно возмущенных краевых задач, обладающих в нескольких точках явлением начального скачка оказывается весьма затруднительным.

Поэтому данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных краевых задач, имеющие начальные скачки в точках $t = 0$ и $t = 1$, что является одним из особенностей изучаемой задачи.

Фундаментальная система решений. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующую задачу

$$L_0 u_1 \equiv B(t)u_1' + C(t)u_1 = 0, \; u_1(0) = 1. \tag{4}$$

В силу условий I, II задача (3) имеет решение

$$u_1(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{C(x)}{B(x)} dx \right). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим однородное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = 0, \tag{6}$$

соответствующее уравнению (1).

Известно [3], что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (6) имеет фундаментальную систему решений $\widetilde{y}_1(t,\varepsilon),\ \widetilde{y}_2(t,\varepsilon), \widetilde{y}_3(t,\varepsilon)$ достаточно гладких и удовлетворяющих на $[0,1]$ соотношениям

$$\widetilde{y}_1^{(q)}(t,\varepsilon) = u_1^{(q)}(t) + O(\varepsilon),$$

$$\widetilde{y}_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(x)dx} [u_2(t)\mu_2^q(t) + O(\varepsilon)], \tag{7}$$

$$\widetilde{y}_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_3(x)dx}[u_3(t)\mu_3^q(t)+O(\varepsilon)],$$

где $u_1(t)$ определяется формулой (5), а $u_2(t)$ и $u_3(t)$ однозначно определяются из следующей задачи

$$p_{k-1}u_k'(t)+q_{k-1}u_k(t)=0,\quad u_k(0)=1,$$

где

$$p_{k-1}(t)=\mu_{k-1}(t)(A(t)+2\mu_{k-1}(t))\neq 0,\ t\in[0,1],\ k=2,3,$$
$$q_{k-1}(t)=C(t)+A(t)\mu_{k-1}'(t)+3\mu_{k-1}(t)\mu_{k-1}'(t),\ t\in[0,1],\ k=2,3.$$

В качестве фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения (6) возьмем [4]

$$y_1(t,\varepsilon)=\widetilde{y}_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon)=\widetilde{y}_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon)=\widetilde{y}_3(t,\varepsilon)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \mu_3(x)dx}.$$

Тогда в силу оценок (7) имеем

$$\begin{gathered}y_1^{(q)}(t,\varepsilon)=u_1^{(q)}(t)+O(\varepsilon),\\ y_2^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(x)dx}[u_2(t)\mu_2^q(t)+O(\varepsilon)],\\ y_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_3(x)dx}[u_3(t)\mu_3^q(t)+O(\varepsilon)],\quad q=0,1,2.\end{gathered}\tag{8}$$

Составим определитель Вронского $W(t,\varepsilon)$ для фундаментальной системы решений (8) уравнения (6).

Тогда, раскладывая $W(t,\varepsilon)$ по элементам первого столбца, получим

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^3}u_1(t)u_2(t)u_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times\tag{9}$$
$$\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t \mu_2(x)dx}(1+O(\varepsilon))\neq 0$$

Здесь согласно процедуре определения $u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t)$ отличны от нуля на отрезке $0\le t\le 1$, корни $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ различны и также отличны от нуля.

Построение начальной функции. По аналогии [4], введем начальную функцию

$$K(t,s,\varepsilon)=\frac{W(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\tag{10}$$

где $W(s,\varepsilon)$ – вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (6), $W(t,s,\varepsilon)$ – определитель третьего порядка, который получается из $W(s,\varepsilon)$ заменой третьей строки соответственно строкой

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon),$$

где $y_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,3$ – фундаментальная система решений уравнения (6).

Из явного выражения функции $K(t,s,\varepsilon)$ следует, что она обладает следующими свойствами:

1. По переменной t удовлетворяет уравнению (6):

$$L_\varepsilon K=0,\ t\in[0,1],\ t\neq s.$$

2. При $t=s$ удовлетворяет условиям:

$$K(s,s,\varepsilon)=0,\ K'(s,s,\varepsilon)=0,\ K''(s,s,\varepsilon)=1.$$

3. Не зависит от выбора фундаментальной системы решений уравнения (6).

Итак, начальная функция $K(t,s,\varepsilon)$ для уравнения (6) построена. Теперь, введем в рассмотрение следующие функции:

$$K_0(t,s,\varepsilon)=\frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)};\quad K_1(t,s,\varepsilon)=\frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\tag{11}$$

где $W(s,\varepsilon)$ - вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (6); $P_0(t,s,\varepsilon),\quad P_1(t,s,\varepsilon)$ - определители 3-го порядка, которые получаются из $W(s,\varepsilon)$ заменой 3-ой строки соответственно строками

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ 0;\qquad 0,0,y_3(t,\varepsilon)$$

где $y_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ фундаментальная система решений уравнения (6). Заметим, что $K_0(t,s,\varepsilon),\quad K_1(t,s,\varepsilon)$ являются непрерывными функциями t и s вместе с производными до 3-го порядка включительно, и как функция переменной t удовлетворяют однородному уравнению (6):

$$L_\varepsilon K_0=0,\quad L_\varepsilon K_1=0$$

при $0<t,s<1$, а при $t=s$ удовлетворяет условиям

$$K_0(s,s,\varepsilon)+K_1(s,s,\varepsilon)=0,\ K'_{0t}(s,s,\varepsilon)+K'_{1t}(s,s,\varepsilon)=0,$$

$$K''_{0t}(s,s,\varepsilon)+K''_{1t}(s,s,\varepsilon)=1.$$

Из (11) с учетом (8) и (9) получим для $K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ и $K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon^2\left(\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(s)B(s)}-\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_2(x)dx\right)}{u_2(s)\mu_2(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_2(x)dx}\right)\right),$$

$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon^2\left(\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(s)\mu_3(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s\mu_3(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s\mu_3(x)dx}\right)\right),\tag{12}$$

Построение граничных функций. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{J_i(t,\varepsilon)}{J(\varepsilon)},\ i=1,2,3,\tag{13}$$

где $J(\varepsilon)$ представляет собой определитель третьего порядка, элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений (8) и имеет вид

$$J(\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon)\\ y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon)\\ y_1'(1,\varepsilon) & y_2'(1,\varepsilon) & y_3'(1,\varepsilon)\end{vmatrix};$$

$J_i(t,\varepsilon)$ – определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой i-ой строки на строку

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon),$$

которая состоит из фундаментальной системы решений (8) уравнения (6).

Непосредственно из самого способа построения функций $\Phi_i(t,\varepsilon)$ можно установить, что функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, определяемые формулой (13), удовлетворяют уравнению (5) и следующим краевым условиям

$$\begin{aligned}&\Phi_1(0,\varepsilon)=1,\quad \Phi_1'(0,\varepsilon)=0,\quad \Phi_1'(1,\varepsilon)=0,\\ &\Phi_2(0,\varepsilon)=0,\quad \Phi_2'(0,\varepsilon)=1,\quad \Phi_2'(1,\varepsilon)=0,\\ &\Phi_3(0,\varepsilon)=0,\quad \Phi_3'(0,\varepsilon)=0,\quad \Phi_3'(1,\varepsilon)=1,\end{aligned}\tag{14}$$

и не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (6).

Функцию $\Phi_i(t,\varepsilon)$, удовлетворяющую граничным условиям (14) и однородному уравнению (6), назовем граничными функциями задачи (1), (2).

Теперь исследуем асимптотическое поведение определителя $J(\varepsilon)$. Пусть выполнены условия I-III. Тогда, раскладывая $J(\varepsilon)$ по элементам последней строки и учитывая (7), находим

$$J(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}u_1(0)u_2(0)u_3(1)\mu_2(0)\mu_3(1)(1+O(\varepsilon))\neq 0.\tag{15}$$

Принимая во внимание (15) и раскладывая определители $J_i(t,\varepsilon)$ по элементам i-ой строки, из (13) получаем следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$\Phi_1(t,\varepsilon)=\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_1(0)u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right),$$

$$\Phi_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\left[-\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)\mu_2(0)}-\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(1)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)\mu_2(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right)\right],$$

$$\Phi_3(t,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)-\right.$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)\mu_2(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right)\Bigg]. \qquad (16)$$

Теорема. *Пусть выполнены условия I-III. Тогда неоднородная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon)=a_0\Phi_1(t,\varepsilon)+a_1\Phi_2(t,\varepsilon)+a_2\Phi_3(t,\varepsilon)+\Phi_1(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 K_1(0,s,\varepsilon)F(s)ds+$$

$$+\Phi_2(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 K_1'(0,s,\varepsilon)F(s)ds-\Phi_3(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 K_0'(1,s,\varepsilon)F(s)ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K_0(t,s,\varepsilon)F(s)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_1^t K_1(t,s,\varepsilon)F(s)ds. \qquad (17)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы непосредственной проверкой достаточно убедиться, что функция, заданная по формуле (17), удовлетворяет всем условиям определения решения краевой задачи (1), (2). Ее единственность следует из (15). Теорема доказана.

Рассмотрим формулу (17). Учитывая (12), (16), получим для (17) на отрезке $0\le t\le 1$ следующее асимптотическое представление:

$$y^{(q)}(t,\varepsilon)=a_0\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)}-\int_0^t\frac{u_1^{(q)}(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{F(t)}{\mu_3(t)-\mu_2(t)}\left(\frac{\mu_3^q(t)}{\mu_3^2(t)}-\frac{\mu_2^q(t)}{\mu_2^2(t)}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)\left[a_1-a_0\frac{u_1'(0)}{u_1(0)}-\frac{F(0)}{B(0)}\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)\left[a_2+a_0\frac{u_1'(0)}{u_1(0)}-\frac{F(1)}{B(1)}+\int_0^1\frac{u_1'(1)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds\right]+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right), \qquad (18)$$

где $u_1'(0)=-\dfrac{C(0)}{B(0)},\ u_1(0)=1$.

Теперь, определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных соображений мы не можем сформулировать краевые условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0\overline{y}\equiv B(t)\overline{y'}+C(t)\overline{y}=F(t), \qquad (19)$$

получаемого из (1) при $\varepsilon=0$. Таким дополнительным соображением мы можем получить из (18). Из (18) следует, что предельная функция для $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ не будет содержать a_1,a_2, так как коэффициенты при a_1,a_2 имеют порядок $O(\varepsilon)$, а при a_0 имеет порядок $O(1)$, при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, краевые условия для решения $\overline{y}(t)$ вырожденного уравнения (19) можно получить из (2) путем оставления 1-го уравнения из (2), т.е.

$$\overline{y}(1)=a_0 \qquad (20)$$

Решение задачи (19), (20) с помощью решения (4) уравнения (3), представимо в виде

$$\bar{y}(t) = a_0 \frac{u_1(t)}{u_1(0)} - \int_0^t \frac{u_1(t)F(s)}{u_1(s)B(s)} ds, \; \bar{y}'(t) = a_0 \frac{u_1'(t)}{u_1(0)} - \int_0^t \frac{u_1'(t)F(s)}{u_1(s)B(s)} ds + \frac{F(t)}{B(t)}. \qquad (21)$$

Тогда в силу условия IV из (18) получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \; \lim_{\varepsilon \to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1, \quad y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда и из (18) следует, что в точках $t = 0,\ t = 1$ решение задачи (1), (2) обладает явлением начальных скачков, причем величины начальных скачков определяются из следующих равенств:

$$\Delta_0 = y'(0,\varepsilon) - \overline{y'}(0) = a_1 - \frac{F(0)}{B(0)} + \frac{C(0)}{B(0)} a_0,$$

$$\Delta_1 = y'(1,\varepsilon) - \bar{y}'(1) = a_2 - \frac{F(1)}{B(1)} + \left[a_0 e^{-\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx} + \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} e^{-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx} ds \right] \frac{C(1)}{B(1)}.$$

Литература:

1. Есимова А.Т., Касымов К.А. Об оценках решений сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком нулевого порядка // Вестник КазГУ. Серия математика. - Алматы, 1993. - №1. С.140-145.
2. Касымов К.А., Нургабылов Д.Н., Пшенбаев С.К. Асимптотические оценки решений неразделенной краевой задачи для линейных сингулярно возмущенных уравнений третьего порядка // Вестник АН РК. 1999, №1. - С. 37-40.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 399 с.
4. Касымов К.А., Жакипбекова Д. А., Нургабыл Д.Н. Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник Казахского национального университета им. аль-Фараби, Серия математика, мех., инф. - 2001. №3. - С. 73-78.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.