Саркелова Ж.Ж.

ЧЕКСИЗ АЙМАКТАГЫ ЖЫЛЫШУУ ПРОЦЕССТЕРИ ҮЧҮН КАЦ ТИБИНДЕГИ СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН БИР ЫЛДАМДЫКТАГЫ МАСЕЛЕ

Саркелова Ж.Ж.

СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННАЯ ОДНОСКОРОСТНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ТИПА КАЦА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Zh.Zh. Sarkelova

SINGULAR-DISTURBED SINGLE-SPEED TRANSPORT TASK OF KAC TYPE IN UNLIMITED REGION

УДК: 517.9

Акыркы он жыл аралыгында математикада интегралдык өзгөрүүлөргө байланыштуу түз жана тескери кичине параметр менен жылышуу процесстери үчүн маселелер жаатында ыкмалары кеңири тараган. Ушуга байланыштуу бул иште чексиз аймактагы жылышуу процесстери үчүн Кац тибиндеги сингулярдык дүүлүккөн маселе каралган. Маселенин чыгарылышы салмактуу мейкиндикте изделет. Обочолонгон маселенин чыгарылышында бир гана жообу аныкталат. $L_h^p(D_0),\ (p\geq 1)$ *салмактуу мейкиндиктеги сингулярдык дүүлүккөн маселенин чечүү шарты жана анын чыгарылышынын бир гана жообу бар экендиги далилделген, бул жерде* $0\leq h$ *- салмактуу функция. Ушуну менен бирге калдык функция* ξ *бир гана жол менен аныкталат. Көрсөтүлгөн салмактуу мейкиндиктеги сингулярдык дүүлүккөн жана обочолонгон маселелердин чыгарылышынын жакындыгы каралып далилделген. Бул жерде априордук информациянын баштапкы маалыматтары* $L_{(R)}^p$ *мейкиндигинен алынат.*

***Негизги сөздөр:** сингулярдык дүүлүккөн маселе, бир ылдамдыктагы маселе, баштапкы маселе, жылышуу теңдеме, салмактуу мейкиндик, чексиз аймак, кичине параметр.*

За последние десятилетия в математике получили широкое распространение методы, связанные с использованием интегральных преобразований в области прямых и обратных задач переноса с малым параметром. В связи с этим, в данной работе исследуется сингулярно-возмущенная задача переноса типа Каца в неограниченной области. Решение задачи ищется в весовом пространстве. Определяется единственность решения вырожденной задачи. А также доказывается условие разрешимости и единственности решения исходной сингулярно-возмущенной задачи в весовом пространстве $L_h^p(D_0),\ (p\geq 1)$, *где* $0\leq h$ *- весовая функция. При этом остаточная функция* ξ *определяется единственным образом. Рассматривается и доказывается близость решений сингулярно-возмущенной задачи и вырожденной задачи в указанном пространстве, когда априорная информация на исходных данных задается из* $L_{(R)}^p$.

***Ключевые слова:** сингулярно-возмущенная задача, односкоростная задача, задача переноса, начальная задача, весовое пространство, неограниченная область, малый параметр.*

In recent decades, methods connected with the use of integral transformations in the field of direct and inverse transport problems with a small parameter have become widespread in mathematics. In connection with this, in this paper we study a singularly perturbed problem of Kac transfer in an unbounded domain. The solution of the problem is sought in the weight space. The uniqueness of the solution of the degenerate problem is determined. And also the condition of solvability and uniqueness of the solution of the original singularly perturbed problem in a weighted space $L_h^p(D_0),\ (p\geq 1)$ *is proved, where* $0\leq h$ *- is the weight function. In this case, the residual function* ξ *is uniquely determined. We consider and prove the closeness of the solutions of a singularly perturbed problem and a degenerate problem in the indicated space, when the a priori information on the initial data is given by* $L_{(R)}^p$.

***Key words:** singularly perturbed problem, one-velocity problem, transfer problem, initial problem, weighted space, unbounded domain, small parameter.*

Известно, что в указанных дифференциальных уравнениях, когда малый параметр является множителем при старших производных, то такие классы уравнений называются сингулярно-возмущенными уравнениями (СВУ) [2,3,6] при этом знаем, что $h(x)\geq 0$ обозначает частоту столкновений между электронами и окружающей средой [1,4,8]. В весовых пространствах функция $h(x)$ называется весовой функцией и интегрируема, и ее интеграл положителен. В связи с этим, в данной работе исследуется СВУ переноса типа Каца с условием Коши в неограниченной области.

Пусть

$$\varepsilon^{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial t}(E_a^{1,1}U_\varepsilon(t,x))+U_\varepsilon^2(t,x)\right]+\lambda[E_a^{1,1}U_\varepsilon+hU_\varepsilon]=f_\varepsilon(t,x), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} U_\varepsilon\big|_{t=0}=\varphi(x)+\exp(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}), \quad (V(0,x)=\varphi(x)), \\ U_{\varepsilon t}\big|_{t=0}=V_t(0,x)+\dfrac{2ax}{\varepsilon}\exp(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}), \quad \forall x\in R, \end{cases} \qquad (2)$$

где $0<\beta=const<\dfrac{1}{2};\ 0<a$ - заданные постоянные, $\varphi(x), f_\varepsilon(t,x)$ - известные функции в областях $R,\bar{\mathrm{D}}_0$ соответственно, причем

$$\begin{cases} (t,x)\in D_0=(0,T_0)\times R;\ E_a^{1,1}=\dfrac{\partial}{\partial t}+a\dfrac{\partial}{\partial x}, \\ \left\|f(t,x)-f_\varepsilon(t,x)\right\|_{L^p(0,T_0)}\le\delta(\varepsilon),(p>1). \end{cases} \qquad (3)$$

Относительно исходной СВЗ допускается априорная информация

$$\left\|U_\varepsilon(0,x)-\varphi(x)\right\|_{L^p(R)}=\left(\int_R\exp\left(-p\frac{\tau^2}{\varepsilon}\right)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2p}}\varepsilon^{\frac{1}{2p}}, \qquad (4)$$

для доказательства близости решений СВЗ и ВЗ в $L_h^p(D_0),\ (p\ge1)$ с нормой:

$$\begin{cases} \|U\|_{L_h^p}=(\sup\limits_{(0,T_0)}\int_0^t h(\tau)\left|U(s,\tau)\right|^p d\tau ds)^{\frac{1}{p}}, \\ 0\le h(x)\in L^1(R):\left(\int_R h(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\le N_0=const. \end{cases}$$

Отметим, так как $L_h^p(D_0)$ не является Банаховым пространством [7], то можем ввести $\tilde{L}_h^p(D_0),\ (p\ge1)$ - пространство Лебега, по определению, является пополнением пространства $L_h^p(\bar{D}_0)$, элементами которого являются некоторые функции, приблизиться к которым с любой степенью точности (в среднем с показателем p) можно с помощью непрерывных на $\bar{D}_0$ функций, так как $L_h^p(\bar{D}_0)$ плотно в $\tilde{L}_h^p(D_0)$, и интегралы понимаются в смысле Лебега.

Известно, что при $\varepsilon=0$ из задачи (1), (2) следует вырожденная задача (ВЗ):

$$V_t+aV_x+\frac{1}{\lambda}hV=\frac{1}{\lambda}f, \qquad (5)$$

$$V\,|_{t=0}=\varphi(x), x\in R \qquad (6)$$

Из условия (2) видно, что близость начальных условий СВЗ и ВЗ: $U_\varepsilon(0,\mathrm{x}),\mathrm{V}(0,\mathrm{x})$ выполняется не для $\forall x\in R$, поэтому, вводится априорная информация вида (4). А для общего представления асимптотического характера функции $U_\varepsilon(t,x)$, имеем

$$U_\varepsilon = V(t,x) + \Omega_\varepsilon(t,x) + \xi_\varepsilon(t,x), \qquad (*)$$

где функция $\Omega_\varepsilon(t,x)$ выражается в виде:

$$\Omega_\varepsilon(t,x) = \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right),$$

и отсюда видно, что малость этой функции относительно малого параметра $\varepsilon \in (0,1)$ нарушается на отрезке, когда $x - at = 0,\, t \in [0, T_0]$, функция $\Omega_\varepsilon(t,x)$ является решением задачи Коши [5]:

$$\begin{cases} \Omega_{\varepsilon x}(t,x) + a\Omega_{\varepsilon x}(t,x) = 0, \\ \Omega_\varepsilon |_{t=0} = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right). \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь V – решение вырожденной задачи, $\xi_\varepsilon -$ остаточная функция.

I. Сперва изучим ВЗ (5), (6), и чтобы исключить выражение (hV) из уравнения (5), воспользуясь преобразованием [4]:

$$V(t,x) = Q(t,x)\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau\right), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \qquad (8)$$

из (5) и (6) получим:

$$\begin{cases} Q_t + aQ_x = e^{\frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau} \dfrac{1}{\lambda} f(t,x), \\ Q|_{t=0} = \varphi(x) e^{\frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau} \equiv \psi(x), \forall x \in R, \end{cases} \qquad (9)$$

или

$$Q = \psi(x-at) + \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)} h(\tau)d\tau} \frac{1}{\lambda} f(s, x-a(t-s))ds\,. \qquad (10)$$

Тогда, учитывая (10), из (8) следует

$$V(t,x) = \varphi(x-at) e^{-\frac{1}{\lambda a}\int_{x-at}^{x} h(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda a}\int_{x-a(t-s)}^{x} h(\tau)d\tau} \frac{1}{\lambda} f(s, x-a(t-s))ds\,, \qquad (11)$$

где соотношение (11)-это точное решение ВЗ (5),(6).

В самом деле, частные производные функции V_t, V_x равны:

$$\begin{cases} V_t=\varphi_p(x-at)(-\mathrm{a})\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)+\varphi(x-at)\left(\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)\right)\times \\ \times\left(-\frac{1}{a\lambda}ah(\mathrm{x-at})\right)+\frac{1}{\lambda}f(t,x)+\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x}h(\tau)d\tau\right)\{\left(-\frac{1}{a\lambda}ah(x-a(t-s))\right)\times \\ \times\frac{1}{\lambda}f(s,x-a(t-s))+\frac{1}{\lambda}f_p(s,x-a(t-s))(-a)\}ds, \\ V_x=\varphi_p(x-at)\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)+\varphi(x-at)\left(\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)\right)\times \\ \times[-\frac{1}{a\lambda}(h(x)-h(x-at))]+\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x}h(\tau)d\tau\right)\{-\frac{1}{a\lambda}(h(x)-h(x-a(t-s)))\times \\ \times\frac{1}{\lambda}f(s,x-a(t-s))+\frac{1}{\lambda}f_p(s,x-a(t-s))\}ds, \end{cases}$$

и подставляя (11) в левую сторону (5), получим:

$$\begin{aligned} &V_t+aV_x+\frac{1}{\lambda}hV=-\frac{1}{\lambda}\varphi(x-at)h(x)\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)+\frac{1}{\lambda}f(t,x)- \\ &-\frac{1}{\lambda}h(x)\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x}h(\tau)d\tau\right)\frac{1}{\lambda}f(s,x-a(t-s))+\frac{1}{\lambda}h(x)\varphi(x-at)\times \\ &\times\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-at}^{x}h(\tau)d\tau\right)+\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x}h(\tau)d\tau\right)\frac{1}{\lambda}f(s,x-a(t-s))ds=\frac{1}{\lambda}f(t,x). \end{aligned} \tag{12}$$

А это означает, что (12)- это есть правая сторона уравнения (5), т.е. получим тождество. Что требовалось доказать.

Лемма 1. В условиях (6) и (8) ВУ (5) имеет единственное решение по правилу (11) и при этом функция V, и частные производные этой функции вида V_t, V_x непрерывны, а производные вида $V_{t^2}, V_{tx}\in L^p(0,T_0)$ для всех фиксированных x.

II. Далее, для доказательства разрешимости исходной СВЗ и близости решений СВЗ, ВЗ в $L_h^p(D_0)$ с априорной информацией (4) из $L^p(R)$, предположим (*), т.е.:

$$U_\varepsilon(t,x)=V(t,x)+\exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right)+\xi(t,x), \tag{13}$$

причем

$$\begin{cases} U_{\varepsilon x}=V_x-\frac{2(x-at)}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right)+\xi_x, \\ U_{\varepsilon t}=V_t+\frac{2a(x-at)}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right)+\xi_t, \\ \xi_t^{(i)}|_{t=0}=0,\ \forall x\in R,\ (i=0,1), \\ U_{\varepsilon t}+aU_{\varepsilon x}=V_t+aV_x+\xi_t+a\xi_x, \end{cases} \tag{14}$$

где V - решение ВЗ (5), а ξ - остаточная функция. Для определения этих функций, подставим (13), (14) в (1), с учетом $U_{\varepsilon t}, U_{\varepsilon x}, U_{\varepsilon tx}, U_{\varepsilon t^2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} V_t + aV_x + \frac{1}{\lambda} hV = \frac{1}{\lambda} f, \\ \varepsilon^\beta \frac{\partial}{\partial t}(\xi_t + a\xi_x) + \lambda(\xi_t + a\xi_x) = -\varepsilon^\beta \left(V + \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon} + \xi\right)^2\right. - \\ -h\left(\xi + \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right)\right) + f_\varepsilon - f - \varepsilon^\beta (V_{t^2} + aV_{tx}). \end{cases} \tag{15}$$

Далее, из второго уравнения (15) следует:

$$\xi_t + a\xi_x = \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\{-(2V(s,x)\xi(s,x) + 2\xi(s,x)\exp\left(-\frac{(x-as)^2}{\varepsilon}\right) +$$
$$+\xi^2(s,x)) - \frac{1}{\varepsilon^\beta} h(x)\xi(s,x)\}ds + \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\{-(V^2(s,x) +$$
$$+2V(s,x)\exp\left(-\frac{(x-as)^2}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{2(x-as)^2}{\varepsilon}\right)) - \frac{1}{\varepsilon^\beta} h(x)\exp\left(-\frac{(x-as)^2}{\varepsilon}\right) + \tag{16}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\beta}(f_\varepsilon(s,x) - f(s,x)) - V_{s^2}(s,x) - aV_{sx}(s,x)\}ds.$$

Поэтому, имеем:

$$\xi(t,x) = \int_0^t\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)\{-(2\,\mathrm{V}(\tilde{s}, x - a(t-s))\xi(\tilde{s}, x - a(t-s)) +$$
$$+2\xi(\tilde{s}, x-a(t-s))\exp\left(-\frac{(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right) + \xi^2(\tilde{s}, x-a(t-s)) - \tag{17}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^\beta} h(x-a(t-s))\xi(\tilde{s}, x-a(t-s))\}d\tilde{s}ds + Y_\varepsilon(t,x) \equiv (H\xi)(t,x),$$

где

$$Y_\varepsilon \equiv \int_0^t\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)\{-(\mathrm{V}^2(\tilde{s}, x-a(t-s)) + 2\,\mathrm{V}(\tilde{s}, x-a(t-s))\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{2(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right)) - \frac{1}{\varepsilon^\beta} h(x-a(t-s))\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon^\beta}(f_\varepsilon(\tilde{s}, x-a(t-s)) - f(\tilde{s}, x-a(t-s)) -$$
$$-\mathrm{V}_{\tilde{s}^2}(\tilde{s}, x-a(t-s)) - a\,\mathrm{V}_{\tilde{s}x}(\tilde{s}, x-a(t-s))\}d\tilde{s}ds,$$

$$|Y_\varepsilon| \le M_1\varepsilon^\beta + M_2\varepsilon^{\frac{1-2\beta}{q}} M_3\delta(\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\beta}{q}-\beta} + M_4\varepsilon^{\frac{\beta}{q}} = G(\varepsilon),$$
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1; \quad \delta(\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\beta}{q}-\beta} \xrightarrow[\varepsilon=0]{} 0, \tag{18}$$

так как имеет место:

$$\begin{cases}
|Y_{1\varepsilon}| \equiv |\int_0^t [\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)\{-(V^2+2V\exp\left(-\frac{(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right)+ \\
+\exp\left(-\frac{2(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right))\}d\tilde{s}]ds| \le (r_0^2+2r_0+1)\frac{1}{\lambda}T_0\varepsilon^\beta = M_1\varepsilon^\beta, \ (|V|\le r_0), \\
|Y_{2\varepsilon}| \equiv |\int_0^t [\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)(-\frac{1}{\varepsilon^\beta}h(x-a(t-s))\exp\left(-\frac{(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right))d\tilde{s}]ds| \le \\
\le \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t [\left(\int_0^s \exp\left(-\frac{2\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^s \exp\left(-\frac{2(x-a(t-s)-a\tilde{s})^2}{\varepsilon}\right)d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{2}}]h(x-a(t-s))ds \le \\
\le C_1\frac{1}{\varepsilon^\beta}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}} = C_1\left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}-\beta} = M_2\varepsilon^{\frac{1-2\beta}{4}}, \quad \left(0<\beta<\frac{1}{2}\right), \\
|Y_{3\varepsilon}| \equiv |\int_0^t [\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)\frac{1}{\varepsilon^\beta}[f_\varepsilon(\tilde{s},x-a(t-s))-f(\tilde{s},x-a(t-s))]d\tilde{s}]ds| \le \\
\le \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t [\left(\int_0^s \exp\left(-\frac{q\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^s |f_\varepsilon(\tilde{s},x-a(t-s))-f(\tilde{s},x-a(t-s))|^p\,d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{p}}]ds \le \\
\le \frac{1}{\varepsilon^\beta}\delta(\varepsilon)\left(\frac{1}{q\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}T_0 = M_3\delta(\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\beta}{q}-\beta}, \\
|Y_{4\varepsilon}| \equiv |-\int_0^t [\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)\frac{1}{\varepsilon^\beta}[V_{\tilde{s}^2}(\tilde{s},x-a(t-s))+aV_{\tilde{s}x}(\tilde{s},x-a(t-s))]d\tilde{s}]ds| \le \\
\le \int_0^t [\left(\int_0^s \exp\left(-\frac{q\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-\tilde{s})\right)d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^s |V_{\tilde{s}^2}(\tilde{s},x-a(t-s))+aV_{\tilde{s}x}(\tilde{s},x-a(t-s))|^p\,d\tilde{s}\right)^{\frac{1}{p}}]ds \le \\
\le M_0T_0\left(\frac{1}{q\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{\beta}{2}} = M_4\varepsilon^{\frac{\beta}{q}}, \\
\sup_{\bar{D}_0}\left(\int_0^t |V_{s^2}(s,x)+aV_{sx}(s,x)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_0 = const, \\
\sup_{\bar{D}_0}\int_0^t h(x-a(t-s))ds \le C_1
\end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, из уравнения (17) видно, что если для оператора H выполняется условие:

$$\begin{cases} d_H = (2r_0 + 2 + 2r)\dfrac{1}{\lambda}T_0\varepsilon^{\beta} + \dfrac{1}{\lambda}C_1 < 1, \\ \| H_{\xi} - Ho \|_C \le (1-d_H)r, \ (\xi_0 = 0), \\ S_r(0) = \{\xi; \ |\xi| \le r = const, \ \forall (t,x) \in \overline{D}_0\}, \end{cases} \tag{20}$$

то уравнение (17) разрешимо в $C\overline{D}_0$, причем

$$\| \xi \|_C \le (1-d_H)^{-1} G(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \tag{21}$$

Лемма 2. При условиях леммы 1 и (18), (20) и (21) остаточная функция ξ определяется единственным образом, как решение уравнения (17) в $C\overline{D}_0$ с оценкой (21).

Из полученных результатов следует, что:

$$|U_{\varepsilon} - V| \le \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon} \right) + (1-d_H)^{-1} G(\varepsilon) \tag{22}$$

Неравенство (22) оценим в смысле нормы $L_h^p(D_0)$, т.е.

$$\begin{cases} \| U_{\varepsilon} - V \|_{L_h^p(D_0)} \le N_1 G(\varepsilon) + \left(T_0 h_0 \sqrt{\dfrac{\pi}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{2p}} = \Delta_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \\ 0 \le h \le h_0, \ N_1 = T_0^{\frac{1}{p}} N_0 (1-d_H)^{-1}, \ N_0 = \left(\int\limits_R h(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 1. Если выполняются условия лемм 1 и 2, то у СВЗ существует единственное решение $U_{\varepsilon}(t,x)$ по правилу (13), причем близость решений СВЗ и ВЗ устанавливается по формуле (23).

Литература:

1. Ахиезер А.И. Кинетические уравнения Больцмана. - Киев: ИТФ АН ССР, 1973. - 29с.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. - Москва: Наука, 1973. - 272 с.
3. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1972. - 356 с.
4. Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса. - Бишкек: Илим, 2010.- 116с.
5. Омуров Т.Д., Алиева А.Р. Задача Коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области // Приволжский Научный Вестник. Ижевск (Россия), 2016. №12-1(64). - С. 36-43.
6. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник, 22(64), Выпуск №2, 1948. - С. 193-204.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. - Москва: Наука, 1980. - 496 с.
8. Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana. Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams, Journal Math. Phys., 1989, Vol. 30, No. 5. - 1177-1186.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Иманалиев Т.М.