МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Уаисов А.Б.

ТУУНДУНУН АЛДЫНДА КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРАТЫЛЫШЫ

Уаисов А.Б.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

A.B. Uaisov

ASYMPTOTIC DECOMPOSITION OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER FOR DERIVATIVES

УДК: 917.928

Бул макалада үчүнчү тартиптеги эки жогорку туундунун алдында кичи параметрлүү дифференциалдык тендеме үчүн эки чекиттүү чектик маселеси кошумча мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары карама-каршы белгиге ээ болгон учурда каралган. Бул иш сингулярдуу дүүлүккөн четтик маселенин чыгарылышынын кичи параметр боюнча каалаган даражадагы тактыкта асимптотикалык ажыратылышын түзүүгө арналган. Иште каралган четтик маселенин чыгарылышынын бир калыпта асимптотикалык ажыратылышын түзүүнүн алгоритми жазылган. Асимптотиканын регулярдуу жана четтик катмардагы нөлүнчү жана $k-$ *мүчөлөрү аныкталган жана алардын баалоосу алынган. кичи параметр нөлгө умтулганда дүүлүккөн четтик маселенин чыгарылышынын туундусунун өсүшү алынган менен алынган чечимдер чек балл маселени жиберди. Каралган сингулярдуу дүүлүккөн четтик маселенин чыгарылышы берилген кесиндинин эки учунда тен биринчи тартиптеги баштапкы секирик кубулушуна ээ экендиги аныкталган, башкача айтканда каралган четтик маселенин чыгарылышы чектик секирик кубулушуна ээ. Баштапкы секириктердин чоңдуктары аныкталган. Асимптотиканын калдык мүчөсү бааланган.*

Негизги сөздөр: *асимптотика, четтик маселе, кошумча мүнөздөгүч теңдеме, дүүлүккөн дана дүүлүккөн эмес маселелер, секирик кубулушу.*

В статье рассматривается двухточечная краевая задача для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, что корни дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Работа посвящена построению асимптотического разложения решений сингулярно возмущенной краевой задачи с любой степенью точности по малому параметру. В работе описан алгоритм построения равномерного асимптотического разложения решений рассматриваемой краевой задачи. Определены нулевые и $k-$*ые приближения регулярных и погранслойных членов асимптотики и получены оценки этих членов. Получен рост производных решения возмущенной краевой задачи при стремлении малого параметра к нулю. Установлено, что решение рассматриваемой сингулярно возмущенной краевой задачи имеет начальные скачки первого порядка на обоих концах данного отрезка, т.е. решение данной краевой задачи обладает явлением, так называемых, граничных скачков. Найдены величины начальных скачков. Проведена оценка остаточного члена асимптотики.*

Ключевые слова: *асимптотика, краевая задача, дополнительное характеристическое уравнение, возмущенные и невозмущенные задачи, явление скачка.*

The article considers a two-point boundary value problem for a linear third-order differential equation with a small parameter with two higher derivatives, provided that the roots of the additional characteristic equation have opposite signs. The work is devoted to the construction of the asymptotic expansion of solutions of a singularly perturbed boundary value problem with any degree of accuracy in a small parameter. An algorithm for constructing a uniform asymptotic expansion of solutions of the considered boundary value problem is described. The zero and new approximations of the regular and boundary layer asymptotic terms are determined and estimates of these terms are obtained. The growth of the derivatives of the solution of a perturbed boundary value problem is obtained when the small parameter tends to zero. It is established that the solution of the singularly perturbed boundary-value problem under consideration has initial first-order jumps at both ends of a given segment, i.e. the solution of this boundary-value problem has the phenomenon of the so-called boundary jumps. The values of the initial jumps are found. The estimation of the residual term of the asymptotics is carried out.

Key words: *asymptotic, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed and no perturbed problems, jump phenomenon.*

Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с малым параметром при старших производных

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = f(t) \tag{1}$$

Зададим краевые условия

$$y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y(1,\varepsilon) = b_0, \; y'(1,\varepsilon) = b_1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $b_i \; (i = 0,1)$, a_1 - известные константы.

Нами в работе [1] были получены следующие асимптотические равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t), \; 0 < t < 1, \; j = 1,2, \tag{3}$$

выражающие связь между решением $\bar{y}^{(j)}(t), \; j = 1,2$ вырожденной задачи и решением $y(t,\varepsilon)$ исходной сингулярно возмущенной задачи (1), (2). Из формулы (3) устанавливаем, что $\bar{y}^{(j)}(t), \; j = 1,2$ можно использовать в качестве приближенного решения к $y^{(j)}(t,\varepsilon), j = 1,2$ лишь на отрезке $t_0(\varepsilon) \le t \le t_1(\varepsilon)$, где $t_0(\varepsilon) > 0, \; t_1(\varepsilon) < 1$. Заметим, что равенства (3) не устанавливает точность указанных приближений. Естественно можно поставить вопрос о построении асимптотики по малому параметру ε решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2).

Алгоритм построения асимптотики по малому параметру решения данной краевой задачи. Наложим некоторые требования на коэффициенты уравнения (1):

(a) $A(t), B(t), C(t), F(t) \in C^\infty(I) \;\; I = \{t : 0 \le t \le 1\}$.

(b) $B(t) \ne 0$ *для всех* $t \in [0,1]$.

(c) Уравнение [2]

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0 \tag{4}$$

относительно μ *имеет решения* $\mu_1 = 0, \; \mu_2, \; \mu_3$, *где* $\operatorname{Re}\mu_2 < 0, \operatorname{Re}\mu_3 > 0$.

(d)

$$b_1 B(1) + b_0 C(1) \ne F(1), \tag{5}$$

$$\left[b_0 \exp\left(\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) - \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} \exp\left(-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) ds \right] \cdot C(0) + a_1 B(0) \ne F(0),$$

Теперь, построим ряд, формально удовлетворяющий уравнению (1) и условию (2) и имеющий вид

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon u_\varepsilon(\tau) + \varepsilon w_\varepsilon(s), \; \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \; s = \frac{t-1}{\varepsilon}, \; 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

Подставляя сумму (6) в уравнение (1), получим:

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''(t)+\frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3}+\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3}+\varepsilon A(t)\left(y_\varepsilon''(t)+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2}\right)+ \tag{7}$$

$$+B(t)\left(y_\varepsilon'(t)+\frac{du_\varepsilon}{d\tau}+\frac{dw_\varepsilon}{ds}\right)+C(t)(y_\varepsilon(t)+\varepsilon u_\varepsilon(\tau)+\varepsilon w_\varepsilon(s))=F(t),$$

где

$$y_\varepsilon(t)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\varepsilon^2 y_2(t)+\ldots, \tag{8}$$

$$u_\varepsilon(\tau)=u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\varepsilon^2 u_2(\tau)+\ldots. \tag{9}$$

$$w_\varepsilon(s)=w_0(s)+wu_1(s)+\varepsilon^2 w_2(s)+\ldots. \tag{10}$$

Представляя $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\tau), C(\varepsilon\tau)$, $A(1+\varepsilon s)$, $B(1+\varepsilon s)$, $C(1+\varepsilon s)$ в ряды по степеням ε в обеих частях равенства (7), подставляя (8) – (10) в (7) и (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, причем отдельно зависящие от t и отдельно зависящее τ, получаем

$$B(t)y_0'(t)+C(t)y_0(t)=F(t), \tag{11$_0$}$$

$$B(t)y_1'(t)+C(t)y_1(t)=-A(t)y_0''(t), \tag{11$_1$}$$

$$B(t)y_k'(t)+C(t)y_k(t)=-A(t)y_{k-1}''(t)-y_{k-2}'''(t), \tag{11$_k$}$$

$$\frac{d^3u_0}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_0}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_0}{d\tau}=0, \tag{12$_0$}$$

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_1}{d\tau}=\Phi_1(\tau), \tag{12$_1$}$$

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_k}{d\tau}=\Phi_k(\tau),\ k=2,3,\ldots, \tag{12$_k$}$$

$$\frac{d^3w_0}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_0}{ds^2}+B(1)\frac{dw_0}{ds}=0, \tag{13$_0$}$$

$$\frac{d^3w_1}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2}+B(1)\frac{dw_1}{ds}=P_1(s), \tag{13$_1$}$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2}+B(1)\frac{dw_k}{ds}=P_k(s),\ k=2,3,\ldots, \tag{13$_k$}$$

где

$$\Phi_1(\tau) = -\frac{A'(0)\tau}{1!}\ddot{u}_0(\tau) - \frac{B'(0)\tau}{1!}\dot{u}_0(\tau) + C(0)u_0(\tau),$$

$$\Phi_k(\tau) = -\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}(0)\tau^j}{j!}\ddot{u}_{k-j}(\tau) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}(0)\tau^j}{j!}\dot{u}_{k-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}(0)\tau^{j-1}}{(j-1)!}u_{k-j}(\tau). \quad (14)$$

$$P_1(s) = -\frac{A'(1)s}{1!}\ddot{w}_0(s) - \frac{B'(1)s}{1!}\dot{w}_0(s) + C(1)w_0(s),$$

$$P_k(s) = -\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}(1)s^j}{j!}\ddot{w}_{k-j}(s) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}(1)s^j}{j!}\dot{w}_{k-j}(s) - \sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}(1)s^{j-1}}{(j-1)!}w_{k-j}(s). \quad (15)$$

$$y_0(1) = b_0, \quad (16)$$

$$y_0'(0) + \dot{u}_0(0) = a_1, \quad y_0'(1) + \dot{w}_0(0) = b_1 \quad (17)$$

$$y_1(1) + w_0(0) = 0, \quad (18)$$

$$y_1'(0) + \dot{u}_1(0) = 0, \quad y_1'(1) + \dot{w}_1(0) = 0, \quad (19)$$

$$y_k(1) + w_{k-1}(0) = 0, \quad (20)$$

$$y_k'(0) + \dot{u}_k(0) = 0, \; y_k'(1) + \dot{w}_k(0) = 0. \quad (21)$$

Член $y_0(t)$ определяется единственным образом из уравнения $(11)_0$ с начальным условием (16) на всем промежутке $0 \le t \le 1$. Далее, решая уравнение $(12)_0$ с использованием корня $\mu = \mu_2$ и первое условие из (17), получаем

$$\dot{u}_0(\tau) = (a_1 - y_0'(0))e^{\mu_2(0)\tau}, \tau \ge 0, \quad (22)$$

где $\operatorname{Re}\mu_2 < 0$. Откуда, с учетом требования

$$u_0(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty,$$

получим

$$u_0(\tau) = \frac{a_1 - y_0'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}, \tau \ge 0, \quad (23)$$

где

$$u_0(0) = \frac{a_1 - y_0'(0)}{\mu_2(0)}. \quad (24)$$

Кроме того, из (22) определим

$$\ddot{u}_0(\tau) = \mu_2(0)(a_1 - y_0'(0))e^{\mu_2(0)\tau}, \tau \geq 0. \tag{25}$$

Точно так же из уравнения $(13)_0$ с начальным условием (17) с помощью дополнительного условия $w_0(\tau) \to 0$ при $s \to -\infty$, корня $\mu = \mu_3$, где $\operatorname{Re}\mu_3 > 0$, находим

$$\ddot{w}_0(\tau) = \mu_3(1)(b_1 - y_0'(1))e^{\mu_3(1)s}, \quad \dot{w}_0(s) = (b_1 - y_0'(1))e^{\mu_3(1)s}, s \leq 0, \tag{26}$$

$$w_0(s) = \frac{b_1 - y_0'(1)}{\mu_3(1)} e^{\mu_3(1)s}, s \leq 0, \tag{27}$$

где

$$w_0(0) = \frac{b_1 - y_0'(1)}{\mu_3(1)}. \tag{28}$$

Тогда для членов нулевого приближения $w_0(s), \dot{w}_0(s), \ddot{w}_0(s), \quad u_0(\tau), \dot{u}_0(\tau), \ddot{u}_0(\tau)$ из формул (22) - (27) имеем оценки:

$$\left|\overset{(j)}{u}_0(\tau)\right| \leq Ke^{\mu_2(0)\tau}, \ \tau \geq 0, \ \left|\overset{(j)}{w}_0(s)\right| \leq Ke^{\mu_3(1)s}, \ s \leq 0, \quad j = 0,1,2. \tag{29}$$

Итак, определены все члены нулевого приближения.

Аналогичным образом, из линейной задачи $(11)_1$, (18) определяется $y_1(t)$ при $0 \leq t \leq 1$. Теперь, рассматривая уравнения $(12)_1$, $(13)_1$ и равенства (19), будем иметь следующие задачи:

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1(\tau), \ \dot{u}_1(0) = -y_1'(0), \tag{30}$$

$$\frac{d^3w_1}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2} + B(1)\frac{dw_1}{ds} = P_1(s), \quad \dot{w}_1(0) = -y_1'(1). \tag{31}$$

Здесь $\Phi_1(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\widetilde{\Phi}_1(\tau), \ \tau \geq 0, P_1(s) = \widetilde{P}_1(s)e^{\mu_3(1)s}, s \leq 0$, где $\widetilde{\Phi}_1(\tau)$ и $\widetilde{P}_1(s)$ - известные многочлены переменных τ и s. Из (30) и (31) находим

$$\dot{u}_1(\tau) = -y_1'(0)e^{\mu_2(0)\tau} + \tau x_1(\tau)e^{\mu_2(0)\tau}, \tau \geq 0. \tag{32}$$

$$\dot{w}_1(\tau) = -y_1'(1)e^{\mu_3(1)s} + s z_1(s)e^{\mu_3(1)s}, \quad s \leq 0. \tag{33}$$

Отсюда, используя требования $u_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$ и $w_1(\tau) \to 0$ при $s \to -\infty$, получаем

$$u_1(\tau)=-\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}-\int_{\tau}^{\infty}p\,x_1(p)e^{\mu_2(0)p}dp,\ \tau\geq 0, \tag{34}$$

$$u_1(0)=-\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)}-\int_{0}^{\infty}p\,x_1(p)e^{\mu_2(0)p}dp, \tag{35}$$

$$\ddot{u}_1(\tau)=-y_1'(0)\mu_2(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\left(x_1(\tau)+\tau\,x_1'(\tau)+\tau\,x_1(\tau)\mu_2(0)\right)e^{\mu_2(0)\tau},\tau\geq 0. \tag{36}$$

$$w_1(\tau)=-\frac{y_1'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s}-\int_{s}^{-\infty}p\,z_1(p)e^{\mu_3(1)p}dp,\ s\leq 0, \tag{37}$$

$$w_1(0)=-\frac{y_1'(1)}{\mu_3(1)}-\int_{0}^{-\infty}p\,x_1(p)e^{\mu_3(1)p}dp.$$

$$\ddot{w}_1(\tau)=-\mu_3(1)y_1'(1)e^{\mu_3(1)s}+\left(z_1(s)+s\,z_1'(s)+s\,z_1(s)\mu_3(1)\right)e^{\mu_3(1)s},\quad s\leq 0. \tag{38}$$

где $x_1(\tau),\ z_1(s)$ - известные функции. Из соотношений (34) - (38) легко получаем:

$$\left|\overset{(j)}{u}_1(\tau)\right|\leq Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau},\ \tau\geq 0,\ \left|\overset{(j)}{w}_1(s)\right|\leq Ke^{\bar{\mu}_3(1)s},\ s\leq 0,\quad j=0,1,2. \tag{39}$$

Таким образом, определены члены разложения (6) с номером 1.

Дальнейшее построение проведем по индукции. Допустим, что уже определены все члены с номерами до $k-1$ включительно, причем для функций $w_i(s),\ \dot{w}_i(s),\ \ddot{u}_i(s)$, $u_i(\tau),\ \dot{u}_i(\tau),\ \ddot{u}_i(\tau),\ \ i=0,1,\ldots,k-1$ и для $u_i(0),\ w_i(0)$ получаются выражения типа (34) - (38):

$$\ddot{u}_i(\tau)=-y_i'(0)\mu_2(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\left(x_i(\tau)+\tau\,x_i'(\tau)+\tau\,x_i(\tau)\mu_2(0)\right)e^{\mu_2(0)\tau},\tau\geq 0.$$

$$\dot{u}_i(\tau)=-y_i'(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\tau\,x_i(\tau)e^{\mu_2(0)\tau},\ \ \tau\geq 0. \tag{40}$$

$$u_i(\tau)=-\frac{y_i'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}-\int_{\tau}^{\infty}p\,x_i(p)e^{\mu_2(0)p}dp,\ \tau\geq 0.$$

$$u_i(0)=-\frac{y_i'(0)}{\mu_2(0)}-\int_{0}^{\infty}p\,x_i(p)e^{\mu_2(0)p}dp, \tag{41}$$

$$\ddot{w}_i(s) = -\mu_3(1)\,y_i'(1)e^{\mu_3(1)s} + \left(z_i(s) + s\,z_i'(s) + s\,z_i(s)\mu_3(1)\right)e^{\mu_3(1)s}, \quad s \le 0.$$

$$\dot{w}_i(s) = -y_i'(1)e^{\mu_3(1)s} + s\,z_i(s)e^{\mu_3(1)s}, \quad s \le 0. \tag{42}$$

$$w_i(s) = -\frac{y_i'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\,z_i(p)e^{\mu_3(1)p}\,dp, \; s \le 0.$$

$$w_i(0) = -\frac{y_1'(1)}{\mu_3(1)} - \int_0^{-\infty} p\,x_1(p)e^{\mu_3(1)p}\,dp, \tag{43}$$

отсюда последовательно получаем, что функции $w_i(s), \dot{w}_i(s), \ddot{u}_i(s)$, $u_i(\tau), \dot{u}_i(\tau), \ddot{u}_i(\tau)$, $i = 0,1,\ldots,k-1$ будут экспоненциально убывающими соответственно при $s \to -\infty$ и $\tau \to +\infty$:

$$\left|\overset{(j)}{u}_i(\tau)\right| \le Ke^{\overline{\mu}_2(0)\tau}, \; \tau \ge 0, \; \left|\overset{(j)}{w}_i(s)\right| \le Ke^{\overline{\mu}_3(1)s}, \; s \le 0, \; i < k, \; j = 0,1,2 \tag{44}$$

Тогда из (11)$_k$, (20) получим задачу

$$B(t)y_k'(t) + C(t)y_k(t) = -A(t)y_{k-1}''(t) - y_{k-2}'''(t), \;\; y_k(1) = w_{k-1}(0).$$

Отсюда однозначно определяется $y_k(t)$ при $0 \le t \le 1$.

Рассмотрим $\Phi_k(\tau), P_k(s)$ из (14), (15), где $\Phi_k(\tau)$ выражается через $\overset{(j)}{u}_i(\tau)$ $(j = 0,1,2;\; i < k)$, $P_k(s)$ выражается через $\overset{(j)}{w}_i(s)(j = 0,1,2;\; i < k)$.

Тогда с учетом (25), (26), (28), (29), (30), (33), (34), (37), (40), (42) функции $\Phi_k(\tau), P_k(s)$ записываются в виде

$$\Phi_k(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\,\widetilde{\Phi}_k(\tau), \; \tau \ge 0, \; P_k(s) = \widetilde{P}_k(s)e^{\mu_3(1)s}, s \le 0, \tag{45}$$

$\widetilde{\Phi}_k(\tau)$ и $\widetilde{P}_k(s)$ - известные многочлены.

Используя (45) из (12)$_k$, (13)$_k$ будем иметь

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_k}{d\tau} = e^{\mu_2(0)\tau}\,\widetilde{\Phi}_k(\tau), \; \tau \ge 0 \;, \qquad 46)$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2} + B(1)\frac{dw_k}{ds} = \widetilde{P}_k(s)e^{\mu_3(1)s}, \; s \le 0, \tag{47}$$

Будем решать (46), (47) с начальными условиями

$$y_k'(0)+\dot{u}_k(0)=0,\ y_k'(1)+\dot{w}_k(0)=0.$$

Тогда находим

$$\dot{u}_k(\tau)=-y_k'(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\tau\,x_k(\tau)e^{\mu_2(0)\tau},\ \ \tau\geq 0, \tag{48}$$

$$\dot{w}_k(\tau)=-y_k'(1)e^{\mu_3(1)s}+s\,z_k(s)e^{\mu_3(1)s},\ \ s\leq 0, \tag{49}$$

Решая (48), (49) с учетом требований

$$u_k(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to+\infty,\ w_k(\tau)\to 0 \text{ при } s\to-\infty,$$

получаем решения

$$u_k(\tau)=-\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}-\int_{\tau}^{\infty}p\,x_k(p)e^{\mu_2(0)p}dp,\ \tau\geq 0, \tag{50}$$

$$w_k(\tau)=-\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s}-\int_{s}^{-\infty}p\,z_k(p)e^{\mu_3(1)p}dp,\ s\leq 0$$

и начальные условия

$$w_k(0)=-\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)}-\int_{0}^{-\infty}p\,x_k(p)e^{\mu_3(1)p}dp, \tag{51}$$

$$u_k(0)=-\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)}-\int_{0}^{\infty}p\,x_k(p)e^{\mu_2(0)p}dp,$$

Из (48), (49) будем иметь

$$\ddot{w}_k(s)=-\mu_3(1)y_k'(1)e^{\mu_3(1)s}+\left(z_k(s)+s\,z_k'(s)+s\,z_k(s)\mu_3(1)\right)e^{\mu_3(1)s},\ \ s\leq 0, \tag{52}$$

$$\ddot{u}_k(\tau)=-y_k'(0)\mu_2(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\left(x_k(\tau)+\tau\,x_k'(\tau)+\tau\,x_k(\tau)\mu_2(0)\right)e^{\mu_2(0)\tau},\tau\geq 0.$$

Используя (48) - (52) устанавливаем следующие оценки

$$\left|\overset{(j)}{u}_k(\tau)\right|\leq Ke^{\overline{\mu}_2(0)\tau},\ \tau\geq 0,\ \left|\overset{(j)}{w}_k(s)\right|\leq Ke^{\overline{\mu}_3(1)s},\ s\leq 0,\ \ j=0,1,2 \tag{53}$$

Тем самым, определены все члены разложений (8) - (10).

Оценка остаточного члена. Обозначим через $Y_N(t,\varepsilon)$ частичную сумму порядка n ряда (6):

$$Y_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon\sum_{k=0}^{N}u_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k+\varepsilon\sum_{k=0}^{N}w_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k . \tag{54}$$

Очевидно, что функция $Y_N(t,\varepsilon)$ *удовлетворяет исходной задаче (1), (2) с точностью* $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ *при* $\varepsilon\to 0$*:*

$$\begin{gathered}L_\varepsilon Y_N(t,\varepsilon)-F(t)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1,\\ Y_N'(0,\varepsilon)-a_1=O\left(\mathrm{e}^{\frac{\mu_2}{\varepsilon}}\right),\ Y_N(1,\varepsilon)-b_0=O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ Y_N'(1,\varepsilon)-b_1=O\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mu_3}{\varepsilon}}\right),\end{gathered} \tag{55}$$

Теорема. *При выполнении требований (a)-(d) ряд (6) будет асимптотическим рядом для решения* $y(t,\varepsilon)$ *краевой задачи (1), (2) при* $\varepsilon\to 0$*, которая существует, единственно на промежутке* $0\le t\le 1$*:*

$$y(t,\varepsilon)=Y_N(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1 . \tag{56}$$

Доказательство теоремы можно провести по тому же плану, что и в [3] и [4].

Из (56) заключаем, что в граничных точках $t=0$ и $t=1$ $y''(t,\varepsilon)$ имеет следующие порядки роста по паметру ε :

$$y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

а $y(t,\varepsilon)$ имеет граничные скачки:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)-y_0'(0)=\Delta_0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}y'(1,\varepsilon)-y_0'(1)=\Delta_1,$$

где

$$\Delta_0=a_1-\frac{F(0)}{B(0)}+\frac{C(0)}{B(0)}\cdot\left[b_0\exp\left(\int_0^1\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)-\int_0^1\frac{F(s)}{B(s)}\exp\left(-\int_s^1\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)ds\right],$$

$$\Delta_1=b_1-\frac{F(1)}{B(1)}+\frac{C(1)}{B(1)}\cdot b_0,$$

причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=y_0(t),\ 0\le t\le 1,\ \lim_{\varepsilon\to 0}y^{(j)}(t,\varepsilon)=y_0^{(j)}(t),\ 0<t<1,\ j=1,2 .$$

Подтверждение. Автор был частично поддержан грантом МОН РК № AP05132587 «Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом» (2018-2020) Комитета по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература:

1. Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б. О граничных скачках линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник Жетысуского государственного университета им. И. Жансугурова. 2012. №4. - С. 6-13.
2. Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б., Нусипханулы Б. Асимптотика решения сингулярно возмущенной общей краевой задачи с граничными скачками // Известия НАН РК, 2016, №3. - С. 92-98.
3. Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б. Асимптотическое разложение по малому параметру решения краевой задачи для дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Известия НАН РК, 2014. - №4. - С. 176-184.
4. Нургабыл Д.Н. Асимптотическое разложение по малому параметру решения краевой задачи для условно устойчивых дифференциальных уравнений с малым параметром при производных// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - Москва, 2014. - №7. - С. 12-18.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.