ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ
ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL SCIENCES

Каденова Б.А., Абсатарова У.С., Маматов А.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ АЛЫП КЕЛҮҮЧҮ КЭЭ БИР ФИЗИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Каденова Б.А., Абсатарова У.С., Маматов А.А.

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

B.A. Kadenova, U.S. Absatarova, A.A. Mamatov

SOME PHYSICAL PROBLEMS LEADING TO A DIFFERENTIAL EQUATION

УДК: 537.86.535

Бул макалада кээ бир физикалык маселелерди математикалык моделдөө ыкмасын колдонуу менен дифференциалдык теңдемелерди изилдөөгө байланышкан кээ бир физикалык проблемалар каралган. Дирихленин маселеси өзүнүн өтө маанилүүлүгүнө карабастан Лаплас теңдемесине жана башка типтеги теңдемелер үчүн бирден бир чектик маселе боло албайт. Дирихле маселеси – бул чектик шарттуу четки маселе чектик шарттуусу болуу менен алда канча маанилүү, ал эми туруктуу процесстер үчүн башкача айтканда, убакыттан көз каранды болбогон учурда термелүү жана диффузия теңдемелер – элипстик теңдемесин же ар кандай потенциалдар үчүн Лаплас теңдемесин берет. Ал эми башка проблемалар арасында орток деп аталган башкача айтканда, зарыл болгон шарттарга жооп бериши керек аймактын чек арасы боюнча негизсиз туруктуу Нейман маселеси орун алат. Эгерде Фредгольмдун экинчи роддогу теңдемесинен белгисиз μ тыгыздыктагы жөнөкөй катмар үчүн потенциал катары аныкталган функция болсо, анда Дирихленин маселесине аналогиялуу интегралдык теңдеме менен бере алабыз. Демек, көрүнүп тургандай интегралдык теңдемер методу натыйжалуу жыйынтыкты бере алат.

Негизги сөздөр: *Дирихленин маселелери, дифференциалдык теңдеме, келтирилген четки маселелер, функциялардын туундусу, физикалык процесстер, жылуулук чөйрө.*

В этой статье рассмотрены некоторые физические проблемы, связанные с методом математического моделирования для исследования дифференциальных уравнений. Задачи Дирихле, будучи, несомненно, наиболее важными, тем не менее не являются единственной употребительной краевой задачей для уравнения Лапласа и других уравнений эллиптического типа. Среди других таких задач часто встречается так называемая задача Неймана, т.е. задача нахождения-очевидно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого-гармонической функции по известным значениям ее нормальной производной на границе области, которые должны удовлетворять необходимые условия. Эту задачу можно, аналогично задаче Дирихле, перевести на язык интегральных уравнений, представив, однако, определяемую функцию как потенциал простого слоя с неизвестной полтностью μ, что, если воспользоваться к уравнению Фредгольма второго рода. Как видим, метод интегральных уравнений дает здесь превосходные результаты.

Ключевая слова: *задачи Дирихле, дифференциальных уравнений, уравнения эллиптического типа, потенциал, производные функций, физические процессы, тепловая среда.*

In this article, we consider some physical problems associated with the method of mathematical modeling for the study of differential equations. The Dirichlet problems, being undoubtedly the most important, nevertheless do not appear to be the only marginal boundary value problem for the Laplace equation and for other equations of elliptic type. Among other such problems, the so-called Neumann problem is often encountered; the problem of finding is obvious, up to an arbitrary constant term, a harmonic function from the known values of its normal derivative at the boundary of the domain, which must satisfy the necessary condition. This problem can, analytic to the Dirichlet problem, be translated into the language of integral equations, however, we can define the function as the potential of a simple layer with unknown accuracy μ, which, if we take advantage of the Fredholm equation of the second kind. As we see, the method of integral equations gives excellent results here.

Key words: *dirichlet problems, differential equations, equations of elliptic type, potential, function, physical processes, thermal environment.*

Жаратылыштагы көптөгөн физикалык закондор жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер көрүнүшүндө моделдештирилет, анткени жаратылыш кубулуштары мейкиндикте жүргөндүктөн аларды эки же андан көп өзгөрүлмөлүү белгисиз функциялар жана алардын туундулары менен гана сүрөттөй алабыз. Мисал катары кванттык механикадагы Шредингердин теңдемесин, Ньютондун кыймылдар жана жылуулук алмашуулар жөнүндөгү теңдемелерин, агымдар боюнча Навье-Стокстун теңдемесин жана ошондой эле Максвелдин теңдемесин айта кетсек болот.

Ошентип, кадимки дифференциалдык теңдемеде (КДТ) белгисиз функция жана анын туундулары бир өзгөрүлмөлүү болсо, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеде (ЖТДТ) белгисиз функция жана анын жекече туундулары эки же андан көп өзгөрүлмөлүү болушат. Мисалы x чекитиндеги температураны, чекиттин x координатасынан жана ченөө убактысынан t көз каранды болгон эки өзгөрүлмөлүү $u(x,t)$ функциясы менен мүнөздөөгө болот. Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге катышкан жекече туундуларды, ыңгайына жараша белгилөөлөрүнүн бирөөсү менен жазып көрсөтөбүз.

$$u_t \text{ же } \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_x \text{ же } \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{xx} \text{ же } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u_{xy} \text{ же } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

1. *Сызыктуулук.* Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеде белгисиз функция жана анын бардык жекече туундулары сызыктуу абалда катышышса, б.а. кайсы бир функциянын суперпозициясы болбосо же бири-бирине көбөйтүлгөн, даражага көтөрүлгөн абалдарда болушпаса, анда аны **сызыктуу ЖТДТ** дейбиз, ал эми теңдеме белгисиз функциянын бардык эң жогорку тартиптеги жекече туундуларына карата гана сызыктуу болсо, анда аны **квазисызыктуу** дифференциалдык теңдеме деп атайбыз.

2. *Тартиби.* Теңдемедеги белгисиз функциянын жекече туундуларынын эң жогорку тартиби ЖТДТ нын **тартиби** деп аталат.

3. Жалпы учурда эки x, y —көз каранды эмес өзгөрүлмөлүү экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемени көрүнүшүндө жазууга болот.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F\,u = G \qquad (1)$$

Мында $A, B, C, D, E, F, G -$ турактуу сандар же болбосо x, y өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болгон белгилүү функциялар болушат.

4. *Бир тектүүлүк.* Эгерде $G(x,y) \neq 0$ болсо, анда (1) бир тектүү эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, ал эми $G(x,y) = 0$ болгондо бир тектүү ЖТДТ деп аталышат.

5. *Коэффициенттеринин түрлөрү.* $A, B, C, D, E, F, G -$ теңдеменин коэффициенттери деп аталышып, алар белгилүү туруктуу сандар болгондо (1) туруктуу коэффициенттүү, ал эми белгилүү функциялар болгондо өзгөрүлмө коэффициенттүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

XIX кылымдын экинчи жарымында электродинамикада, акустикада, гидро жана аэродинамикада, туташ чөйрөдө ар кандай физикалык талаа жана толкундар менен байланышкан. Физикалык кубулуштардын математикалык модели көп учурда айрым туундулуу дифференциалдык теңдемелер менен жазылып, ал математикалык физиканын теңдемеси деп аталат. М: Катуулук коэффициенти болгон пружинага илинген m массалуу жүкчөнүн термелиши mu = ku теңдемеси менен берилет. Ал эми ичке зымдагы жылуулуктун таралышы $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$ теңдемеси менен баяндалат. Физиканын квант электродинамикасы талаанын аксиомалык теориясы боюнча жүргүзүлгөн теориялык изилдөөлөр математикалык физиканын маанилүү тармагы болгон математикалык моделдердин жаңы класстарынын, жалпыланган функциялар теориясынын жана үзгүлтүксүз спектрлери операторлор теориясын жана башка түзүүгө алып келди. Физиканын математикалык моделдерин математикалык моделдер менен изилдөөдө жалаң гана физикалык кубулуштарын сандуу эсептеп чыгарууга мүмкүндүк берди. Математикалык моделдерди абдан тактап изилдөө үчүн ЭЭМди колдонуу аркылуу аткарыла турган математикалык сандуу методдордо ийгиликтүү колдонууда.

Физиканын жана механиканын көптөгөн кубулуштары дифференциалдык теңдемелер үчүн четтик маселелер аркылуу жазылат. Бул маселелер математикалык физиканын классын түзөт. Физикалык процесстин эволюциясын толук сүрөттөө үчүн теңдемелердин: биринчиден, убакытын белгиленген моментиндеги (баштапкы шарт) процесстин жүрүшүн жана экинчиден, процесс болуп жаткан чөйрөнүн чегинде (чектик шарт) анын режиминин берилиши зарыл. Баштапкы жана чектик шарттар биригип четки шарттарды түзөт, ал эми дифференциалдык теңдеме тийиштүү четки шарттар менен бирге математикалык физиканын четки маселесин түзөт. Төмөндө математикалык физиканын кээ бир теңдемелерине жана тийиштүү четки маселелерине токтололу. М: термелүү теңдемеси:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = div(p.grad\ u) = qu + f(x,t) \tag{1}$$

Кыл, өзөк, мембрананын термелүүлөрү акустикалык жана электромагниттик термелүүлөрдү сүрөттөйт. (1) теңдемесинде мейкиндик x = ($x_1 \ldots, x_n$) өзгөрүлмөсү физикалык процесс каралуучу $C_1 \langle R^n\ \ , n = 1,2,3$ областында өзгөрүлөт. Физикалык маанисине ылайык, мындагы катышкан чоңдуктар $\rho \rangle 0, p \rangle 0$ болушу керек. Мындан тышкары да $\rho_1 q \varepsilon C(C_1)$ жана $P\varepsilon C^1\ (d)$ болушу тийиш. Ушул шарттарда (1) теңдемеси гиперболалык теңдеме болот. Эгерде ρ=1, P=$a^2 - const$ жана q=0 болсо анда (1) тендемеси толкун теңдемесине өтөт

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \Delta U + f(x,t) \tag{2}$$

Мында Δ - Лаплас оператору, дифференциалдык теңдемеси

$$\rho\frac{du}{df} = div\ (P.grad\ U) - qu + f(x,t) \tag{3}$$

(3) теңдеме параболалык теңдеме болуп эсептелет. Бөлүкчөлөрдүн дифференциалдык процессин жана жылуулуктун чөйрөдөгү таралышын сүрөттөйт.

Эгерде ρ=1, P=a^2 – const жана q=0 болсо, анда (3) теңдеме жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине айланат.

$$\frac{du}{dt} - a^2 \Delta U + f(x,t) \tag{4}$$

Ал эми туруктуу процесстер үчүн башкача айтканда убакыт t дан көз карандылык болбогон учурда термелүү (1) жана диффузия (3) теңдемелери төмөнкү түргө келет:

$$div(PgradU) + qu = f(x,t) \tag{5}$$

Теңдеме – эллипстик теңдеме деп аталат. $\Delta U = -f(x)$ (6) ал эми f=0 болсо (5) теңдемеси Лаплас теңдемеси ΔU=0 (7). (6), (7) теңдемелери ар кандай потенциалдарды. Ньютон (Кулон) потенциалы, кысылбас суюктуктун агымынын потенциалы жана башка канааттандырат. Эгерде (2) толкун теңдемеде тышкы козголтуучу f – жыштыгы ω болгон мезгилдүү функция $f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}$ болсо анда ошол эле жыштыктагы мезгилдүү $u(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$ чечилишинин (чыгарылышынын) U(x) амплитудасы Гельмгольц теңдемесин канааттандырат:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),\ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{8}$$

Чачыроодогу (дифракциядагы) маселелер Гельмгольц теңдемесине келтирилет. Термелүү жүрүшүн толук сүрөттөө үчүн баштапкы козголуунун жана баштапкы ылдамдыктын берилиштери:

$$u \int_{t=0}^{G} u_0(x), \frac{du}{dt} \int_{t=0}^{G} = u_1(x) æ\epsilon G \tag{9}$$

Ал эми диффузиянын жүрүшүн үчүн баштапкы гана козголду

$$u \int_{t=0}^{G} = u_0(x), æ\epsilon G \tag{10}$$

берилиши зарыл.

Мындан сырткары G областынын S чегинде берилген режимдин канааттандырылышы зарыл. Жөнөкөй учурда (1),(3),(5) теңдемелери үчүн чекттик шарттар төмөнкүдөй туюнтма менен берилет.

$$k\frac{du}{dn} + hu\int_s^G = \upsilon(x,t),\ t›0 \qquad (11)$$

Мында k жана h бир убакта нөлгө айланбаган берилген терс эмес функциялар: n – s бетине болгон тышкы нормаль жана υ берилген функция. М: кыл үчүн $u\int_{x=x_0}^{G} = 0$ шарты, ошол кылдын x_0 учу бекитилгендигин билгизет. Ал эми жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн

$$u\int_s^G = \upsilon_0\,(x,t) \qquad (12)$$

шарты G областын S чегинде берилген температуралык режим сакталарын, ал эми

$$\frac{du}{dn}\int_s^G = \upsilon(x,t), \qquad (13)$$

шарты S бети аркылуу болгон жылуулук агымынын берилишин билгизет. Баштапкы шартты гана кармап, ал эми чектик шарты болбогон четки маселе Коши маселеси деп аталат. Эгерде четки маселеде баштапкы да, чектик да шарттары болбосо, анда ал аралаш маселе делет. (5) туруктуу теңдемеси үчүн баштапкы шарт болбогон учурда четки маселе төмөнгүчө коюлат: $C^2(G);\ C^1(\bar{G})$ классынын G областында (5) теңдемеси жана G областын S чегинде:

$k\frac{du}{dn} + \frac{hu}{s} = \upsilon(x)$ (11) чектик шартын канааттандырган $\upsilon(x,t)$функциясын табуу (5) теңдемеси үчүн $u\int_s^G = \upsilon_0\,(x)$ (12) чектик шарттуу четки маселе чектик шарттуусу. Дирахм маселеси, ал эми $\frac{du}{dn}\int_s^G = \upsilon(x,\,)$, (13) Нейман маселеси деп аталат.

Келтирилген четки маселелердин коюлушу областын ичинде жана анын чегине чейин алардын чечилишин жетишээрлик жылмалыгын камсыз кылат. Мындай түрдө коюлган четки маселелер классикалык маселелер деп аталат. Бирок физикалык көп маселелерде чечимдеринини жылмалуулугуна коюлган мындай талаптан баш тартууга туура келет. Каралган областтын ичинде маселенин чечими жалпыланган функция болуп теңдемени жалпыланган функция маанисинде канаатташдырылышы жана чектик шарттар деп аталган, кээ бир жалпыланган мааниде орун алышы мүмкүн. Анда мындай коюлган четки маселелер жалпыланган түрдө коюлган маселе, ал эми тийиштүү чечими жалпыланган чечими болуп саналат.

Чыныгы физикалык процесстерди сүрөттөөчү четки деп аталган маселелер ар кандай жана татаал теңдемелер болушу мүмкүн. Буга биринчи кезекте Шредингердин теңдемеси гидродинамиканын магниттик, гидродинимиканын серпилгичтик теңдемелери, Максвелл, Дирак, Энштейн, Янги – Милле жана башка теңдемелери кирет. Көбүнчө математикалык физиканын теңдемелери изилденген баштапкы жана чектик шарттарды канааттандыруучу чыгарылыштары табылат. Математикалык физиканын теңдемелери теориялык түзүүдө, так жана жакындаштырылган чыгаруу методдорун өнүктүрүүдө П.Эйлер, Ж.Даланбер, П.Лаплас, С.Пуассон, Ф.Риман, Ж,Фурье жана башка илимпоздор салым кошкон.

Адабияттар:

1. Михайлов В.Н. Дифференциалние уравнения в частных производными. - Москва, 1983.
2. Трикоми Ф.Дж. Лекции по уравнениям в частных производных. - М.: КомКинга, 2007. - С. 304-305.
3. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1-2-бөлүктөр. - Фрунзе.
4. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. - Ош: Журнал ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», №3. - 2007.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Кошуев А.Ж.