МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж.

АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ ТИЛИНДЕГИ ҮЧ БУРЧТУКТАР

Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж.

ТРЕУГОЛЬНИКИ НА ЯЗЫКЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

A.B. Urdaletova, S.K. Kydyraliev, E.Dj. Kerimkulova

TRIANGLES IN THE LANGUAGE OF ANALYTIC GEOMETRY

УДК: 372.851

Көптөгөн көрүнүктүү математиктер күчтүү жана өнүккөн аналитикалык геометриянын ыкмаларын жогору баалашкан. Бул ыкмалар техникада жана илимде ийгиликтүү колдонулат. Аларды колдонуу көптөгөн табигый илим жана техника проблемаларын чечүү жолдорун жөнөкөйлөттү. Аналитикалык геометрияны өнүктүрүүгө өзүнүн маанилүү салымын кошкон адамдар арасында белгилүү окумуштуулар Ньютон, Клеро, Эйлер, Лагранж жана көптөгөн башкалар бар. Тилекке каршы мектептик математика, дээрлик, бул укмуштуу жетишкендикти байкаган жок. Аналитикалык геометрия пайда болгондон бери 400 жыл өтсө да, жаңы ыкма математиканы мектепте окутууда дээрлик колдонулбай келе атат. Бул эмгекте биз аналитикалык геометриянын ыкмаларын колдонуп үч бурчтуктарга тиешелүү, көп колдонулган касиеттерди далилдейбиз. Макаланын материалдары жогорку окуу жайларда жана мектептерде математиканы окутууну жакшыртууга жардам бере алат.

***Негизги сөздөр:** аналитикалык геометрия, тик бурчтуу координаттар системасы, түз сызык теңдеме, үч бурчтук медианасы, үч бурчтук бийиктиги, үч бурчтук биссектриса, орточо мааниси, үч бурчтуктун аянты.*

Эффективность и универсальность методов аналитической геометрии оценили многие выдающиеся математики. Эти методы плодотворно применяются во многих естественных науках и в технике, что очень упростило решение значительного количества научных проблем, а также задач из окружающей действительности. В числе тех, кто сделал значительный вклад в развитие аналитической геометрии, значатся выдающиеся ученые Ньютон, Клеро, Эйлер, Лагранж и многие другие. К сожаленью, школьная математика практически не заметила эти выдающееся достижение. Несмотря на 400 лет прошедших с момента появления аналитической геометрии, она фактически отсутствует в курсе школьной математики, хотя новый подход проще и плодотворней чисто геометрического. В данной работе мы показываем, как можно доказать ряд широко известных фактов, которые активно используются в курсе геометрии при исследовании треугольников с помощью методов аналитической геометрии. Материалы статьи могут улучшить процесс преподавания математики в вузах и школах.

***Ключевые слова:** аналитическая геометрия, прямоугольная система координат, уравнение прямой, медиана треугольника, высота треугольника, биссектриса треугольника, среднее арифметическое значение, площадь треугольника.*

The effectiveness and versatility of the methods of analytical geometry have been evaluated by many outstanding mathematicians. These methods are fruitfully applied in many natural sciences and in engineering, which greatly simplified the solution of a significant number of scientific problems, as well as problems from the surrounding reality. Among those who made a significant contribution to the development of analytic geometry are the eminent scientists Newton, Klero, Euler, Lagrange, and many others. Unfortunately, the school mathematics hardly noticed these outstanding achievements. Despite the 400 years that have passed since the advent of Analytical Geometry, it is virtually absent from the course of school mathematics, although the new approach is simpler and more fruitful than purely geometric. In this paper, we show how it is possible to prove a number of well-known facts that are actively used in the course of geometry in the study of triangles using the methods of analytical geometry. Article materials can improve the process of teaching mathematics in universities and schools.

***Key words:** analytical geometry, rectangular coordinate system, equation of a straight line, median of a triangle, height of a triangle, bisector of a triangle, arithmetic mean, area of a triangle.*

Два знаменательных события произошли в 1637 году мире математики. В тот год появился мемуар Пьера де Ферма «*Введение в изучение плоских и телесных мест*», где он выписал (в символике Виета) уравнения различных кривых 2-го порядка в прямоугольных координатах. Ферма наглядно показал, насколько новый подход проще и плодотворней чисто геометрического. Однако мемуар Ферма широкой известностью не пользовался. Гораздо большее влияние имела «*Геометрия*» Рене Декарта, вышедшая в том же 1637 году, которая независимо и гораздо более полно развивала те же идеи.

Эти работы положили начало Аналитической Геометрии. В этом разделе математики каждому геометрическому соотношению ставится в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела. Такой метод «алгебраизации» геометрических свойств доказал свою универсальность и плодотворно применяется во многих естественных науках и в технике. Эффективность методов аналитической геометрии оценили выдающиеся математики. В числе тех, кто сделал значительный вклад в ее развитие, значатся выдающиеся ученые Ньютон, Клеро, Эйлер, Лагранж и многие другие.

К сожаленью, школьная математика практически не заметила это выдающееся достижение. Несмотря на 400 лет прошедших с момента появления Аналитической Геометрии, она фактически отсутствует в курсе школьной математики. Можно задать вопрос: «Что для этого нужно для того чтобы она там появилась?» Ответ напрашивается: «Использование Аналитической Геометрии должно прояснить и упростить значительное количество геометрических проблем».

В данной работе мы показываем, как можно доказать ряд широко известных фактов, которые активно используются в курсе геометрии при исследовании треугольников [1,2]. Например, многие знают, что медианы пересекаются в точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1. Однако, доказательство этого факта в учебниках обычно отсутствует. Мы приводим доказательство этого утверждения. Более того, использование координат позволяет получить очень красивое утверждение: *Координаты точки пересечения медиан являются средним арифметическим значением для координат вершин этого треугольника.*

1. Мы хотим показать, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и найти координаты этой точки.

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках

$$A(x_A;\ y_A), B(x_B;\ y_B), C(x_C;\ y_C).$$

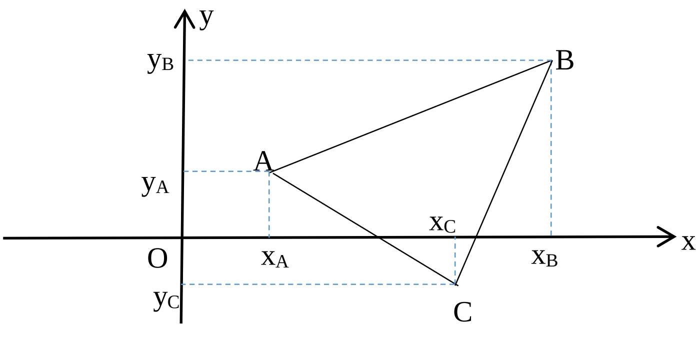

Рис. 1.

Для того чтобы упростить записи рассмотрим такой же треугольник *OKL*, одна из вершин которой расположена в начале координат. Если эта вершина соответствует точке A, то координаты вершин этих треугольников связаны равенствами $x_K = x_B - x_A$; $y_K = y_B - y_A$; $x_L = x_C - x_A$; $y_L = y_C - y_A$.

В треугольнике *OKL* проведем медианы *OP* и *KQ*.

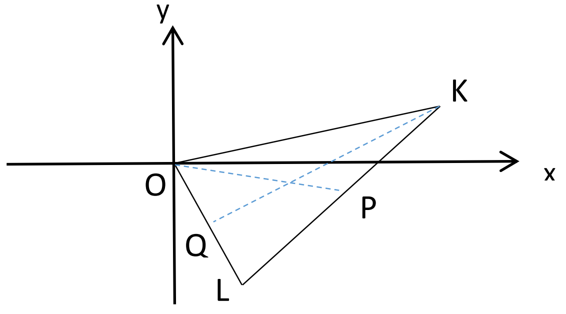

Рис. 2.

Так как медиана делит соответствующую сторону пополам, точка *P* имеет координаты ($\dfrac{x_K + x_L}{2}$; $\dfrac{y_K + y_L}{2}$), а точка Q – координаты

$$\left(\frac{x_O + x_L}{2} = \frac{0 + x_L}{2} = \frac{x_L}{2};\ \ \frac{y_O + y_L}{2} = \frac{0 + y_L}{2} = \frac{y_L}{2}\right).$$

Для того чтобы написать уравнения медиан используем запись уравнения прямой в виде линейной функции: $y = kx + b$.

Подставив в это выражение координаты точек *O* и *P*, и решив соответствующую систему: $\begin{cases} 0 = k \cdot 0 + b, \\ \dfrac{y_K + y_L}{2} = k \cdot \dfrac{x_K + x_L}{2} + b, \end{cases}$ получим уравнение медианы OP: $y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x$.

Затем воспользуемся координатами точек K и Q:

$$\begin{cases} y_K = k \cdot x_K + b, \\ \dfrac{y_L}{2} = k \cdot \dfrac{x_L}{2} + b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_K = k \cdot x_K + b, \\ y_K - \dfrac{y_L}{2} = k \cdot (x_K - \dfrac{x_L}{2}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_K = k \cdot x_K + b, \\ \dfrac{2y_K - y_L}{2} = k \cdot \dfrac{2x_K - x_L}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = y_K - \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L} x_K, \\ k = \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}, \\ k = \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L}, \end{cases}$$

получим уравнение медианы OP: $y = \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L} \cdot x + \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}$.

Координаты точки пересечения медиан OP и KQ получим, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x, \\ y = \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L} \cdot x + \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x, \\ \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x = \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L} \cdot x + \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x, \\ (\dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} - \dfrac{2y_K - y_L}{2x_K - x_L})x = \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}, \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x, \\ \dfrac{3x_K y_L - 3x_L y_K}{(x_K + x_L)(2x_K - x_L)} \cdot x = \dfrac{x_K y_L - x_L y_K}{2x_K - x_L}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{x_K + x_L} \cdot x, \\ x = \dfrac{x_K + x_L}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{y_K + y_L}{3}, \\ x = \dfrac{x_K + x_L}{3}. \end{cases}$$

Покажем, что и отрезок LR — третья медиана треугольника OKL проходит через точку с координатами $(\dfrac{x_K + x_L}{3};\ \dfrac{y_K + y_L}{3})$.

Для этого напишем уравнение прямой LR, проходящей через точки

$(x_L;\ y_L)$ и $(\dfrac{x_K}{2};\ \dfrac{y_K}{2})$: $\begin{cases} y_K = k \cdot x_K + b, \\ \dfrac{y_L}{2} = k \cdot \dfrac{x_L}{2} + b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{x_L y_K - x_K y_L}{2x_L - x_K}, \\ k = \dfrac{2y_L - y_K}{2x_L - x_K}. \end{cases}$

Тогда LR: $y = \dfrac{2y_L - y_K}{2x_L - x_K} \cdot x + \dfrac{x_L y_K - x_K y_L}{2x_L - x_K}$.

Подставив в это уравнение координаты точки пересечения медиан OP и KQ, увидим, что все медианы треугольника OKL пересекаются в точке с координатами $(\dfrac{x_K + x_L}{3};\ \dfrac{y_K + y_L}{3})$.

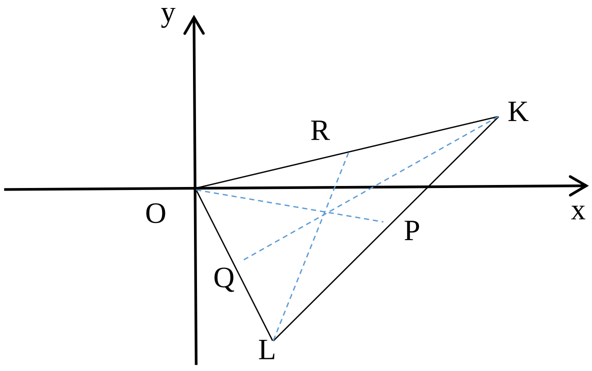

Рис. 3.

Вернемся к исходному треугольнику АВС. Для этого достаточно сместиться на вектор (x_A; y_A). Итак, координаты точки пересечения всех медиан треугольника АВС $\left(\frac{x_K + x_L}{3} + x_A;\ \frac{y_K + y_L}{3} + y_A\right)$. Преобразуем выражения и выразим координаты точки пересечения медиан треугольника АВС через координаты точек А, В, С:

$$\frac{x_K + x_L}{3} + x_A = \frac{x_K + x_L + 3x_A}{3} = \frac{(x_K + x_A) + (x_L + x_A) + x_A}{3} = \frac{x_B + x_C + x_A}{3}.$$

Также выразится и вторая координата.

Итак, доказано, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке, координаты которой являются средним арифметическим значением координат вершин треугольника:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

2. Следствие. Расстояние от точки пересечения медиан до вершины треугольника равно 2/3 длины соответствующей медианы.

Доказательство

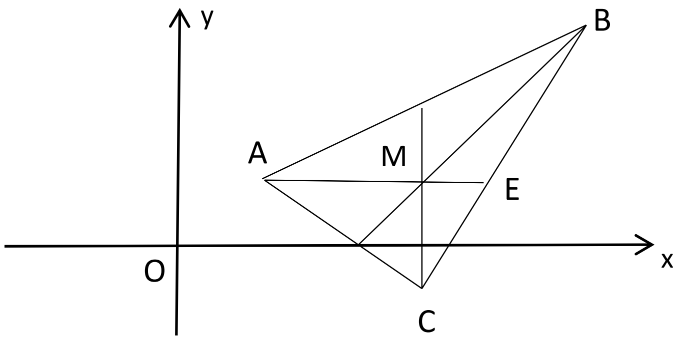

Рис. 4.

Рассмотрим медиану *AE*. Координаты точки Е: $\left(\frac{x_B + x_C}{2};\ \frac{y_B + y_C}{2}\right)$. Соответственно, координаты вектора *AE*: $\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A;\ \frac{y_B + y_C}{2} - y_A\right) = \left(\frac{x_B + x_C - 2x_A}{2};\ \frac{y_B + y_C - 2y_A}{2}\right)$.

Так как координаты точки М — точки пересечения медиан треугольника АВС равны $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$, координаты вектора

AM: $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} - x_A;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} - y_A\right) = \left(\frac{x_B + x_C - 2x_A}{3};\ \frac{y_B + y_C - 2y_A}{3}\right)$.

Сопоставив координаты векторов *AE* и *AM,* убеждаемся в справедливости утверждения Следствия для медианы *AE*. Понятно, что подобное умозаключение справедливо и для остальных медиан.

3. Задача. Дан угол и точка М внутри него. Провести прямую АВ через точку М так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился точкой М пополам. Решим эту задачу, использовав координатное представление, сформулировав ее в следующем виде:

Даны прямые y = x – 3 и y = -0,5x + 3 и точка M(-2; 1). Провести прямую через точку M так, чтобы ее отрезок между прямыми делился точкой M пополам.

Решение. Использование координат делает задачу достаточно простой. Определим координаты точек $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ – точек пересечения исходных прямых с искомой.

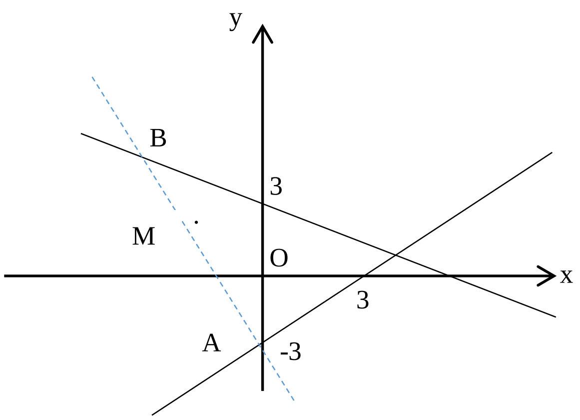

Рис. 5.

Так как точка A лежит на прямой $y = x – 3$, точка B – на прямой $y = –0,5x + 3,$ а координаты точки M являются средним арифметическим точек A и B, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} y_A = x_A - 3, \\ y_B = -0{,}5x_B + 3, \\ \dfrac{x_A + x_B}{2} = -2, \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = x_A - 3, \\ y_B = -0{,}5x_B + 3, \\ x_A + x_B = -4, \\ y_A + y_B = 2. \end{cases}$$

Сложив 1-ое и 2-ое уравнения системы, и воспользовавшись 4-м уравнением получим уравнение $(x_A - 3) + (-0{,}5x_B; + 3) = 2$. Рассмотрев его вместе с 3-м уравнением системы, получим

$$\begin{cases} x_A - 0{,}5x_B = 2, \\ x_A + x_B = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0, \\ x_B = -4. \end{cases} \text{ Отсюда, } \begin{cases} y_A = -3, \\ x_B = 5. \end{cases}$$

Осталось написать уравнение прямой AB: $y = -2x – 3$.

4. Оказывается, все высоты треугольника, как и медианы, пересекаются в одной точке. То же самое можно сказать про биссектрисы треугольника. Продемонстрируем это.

Задачу о координатах точки пересечения высот треугольника можно решать в общем виде. Но получаются слишком сложные, неудобные для использования на практике формулы [3]. Поэтому ограничимся доказательством того факта, что все высоты пересекаются в одной точке. В то же время предлагаемое доказательство показывает, как найти координаты точки пересечения высот любого конкретного треугольника.

Любой треугольник можно расположить так чтобы одна из вершин оказалась на оси ОУ, а противоположная сторона на оси ОХ. Полученный таким образом треугольник имеет вершины *A(a; 0), B(0; b), C(c; 0).*

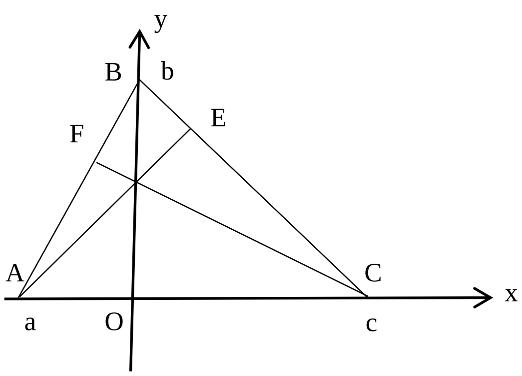

Рис. 6.

Высота опущенная из вершины В лежит на прямой $x = 0$.

Для того чтобы написать уравнения остальных высот используем немного теории.

Угловой коэффициент прямой проходящей через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равен $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Угловой коэффициент прямой *BC* равен $\frac{0-b}{c-0} = \frac{-b}{c}$. Поэтому, угловой коэффициент высоты *AE*, проведенной к *BC* равен c/b.

Итак, уравнение прямой *AE* может быть записано в виде $y = (c/b)x + m$. Подставив в это уравнение координаты точки *A*: $0 = (c/b)a + m \Rightarrow m = -(c/b)a$, получим значение свободного члена и как следствие, уравнение *AE:* $y = (c/b)x - (c/b)a$.

Так как две высоты треугольника имеют уравнения $x = 0$ и $y = (c/b)x - (c/b)a$, координаты точки их пересечения $H(0; -ac/b)$.

Покажем, что и третья высота проходит через эту точку.

Прямая АВ имеет угловой коэффициент $\frac{b-0}{0-a} = \frac{-b}{a}$. Поэтому, уравнение прямой *CF* можно записать в виде $y = (a/b)x + m$. Тогда, используя координаты точки *C,* получим: $0 = (a/b)c + m \Rightarrow m = -(c/b)a$, и как следствие, уравнение *CF:* $y = (a/b)x - ac/b$. Понятно, что эта прямая пересекается с прямой $x = 0$, на которой лежит высота ВО в той же точке — точке $H(0; -ac/b)$.

5. Задача

Найти координаты точки пересечения высот треугольника ABC, с вершинами A(-4; 0), B(2; 3), C(1; -1).

Решение.

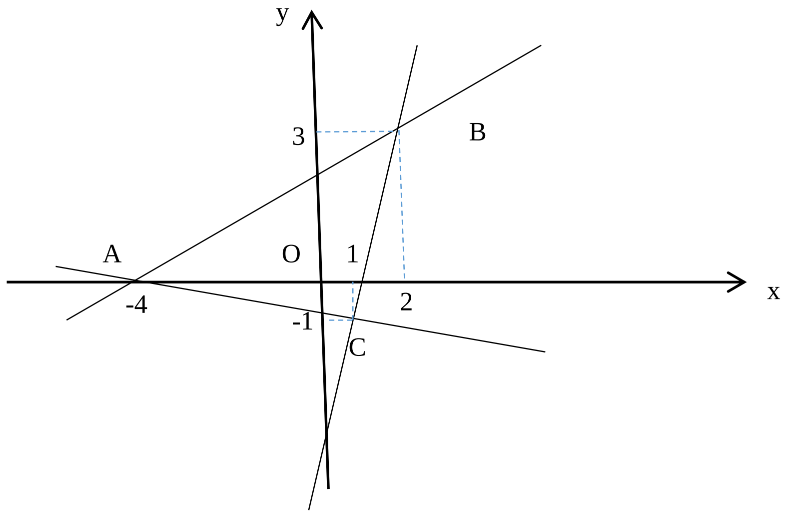

Рис. 7.

Запишем уравнения прямых *AB, BC, AC* в форме линейной функции:

AB: $y = 0{,}5x + 2$; *BC:* $y = 4x - 5$; *AC:* $y = -0{,}2x - 0{,}8$.

Поэтому, уравнение прямой *AE,* перпендикулярной к *BC,* может быть записано в виде $y = -0{,}25x + m$. Подставив в это уравнение координаты точки *A*: $0 = -0{,}25\cdot(-4) + m \Rightarrow m = -1$, получим уравнение *AE:* $y = -0{,}25x - 1$.

Точно так же, уравнение прямой *BF,* перпендикулярной к *AC,* может быть записано в виде $y = 5x + m$. Подставив в это уравнение координаты точки *B*: $3 = 5\cdot 2 + m \Rightarrow m = -7$, получим уравнение *BF:* $y = 5x - 7$.

Как было отмечено выше, точка пересечения прямых является точкой пересечения высот треугольника: $\begin{cases} y = -0{,}25x - 1, \\ y = 5x - 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/7, \\ y = -9/7. \end{cases}$

Для проверки правильности наших утверждений используем третью высоту треугольника. Уравнение прямой *CG*, перпендикулярной к *AB*, может быть записано в виде $y = -2x + m$. Подставив в это уравнение координаты точки *C*: $-1 = -2\cdot 1 + m \Rightarrow m = 1$, получим уравнение *CG:* $y = -2x + 1$.

Координаты точки пересечения прямых *BF* и *CG* подтверждают справедливость утверждения о точке пересечения высот треугольника: $\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = 5x - 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/7, \\ y = -9/7. \end{cases}$

6. Задача

Доказать, что точка пересечения прямых, проведенных через середины сторон треугольника и перпендикулярных этим сторонам, равноудалена от вершин треугольника.

Решение.

Данную задачу, так же, как и задачу о координатах точки пересечения высот треугольника, можно решать в общем виде. Но и здесь получаются слишком сложные, неудобные для использования на практике формулы [3]. Поэтому, ограничимся частным случаем, предусматривающим конкретное расположение треугольника.

Любой треугольник можно расположить так, чтобы одна из сторон оказалась на оси OX, одна из вершин которой находится в начале координат. Такой треугольник имеет вершины *O(0; 0), B(p; q), C(c; 0).*

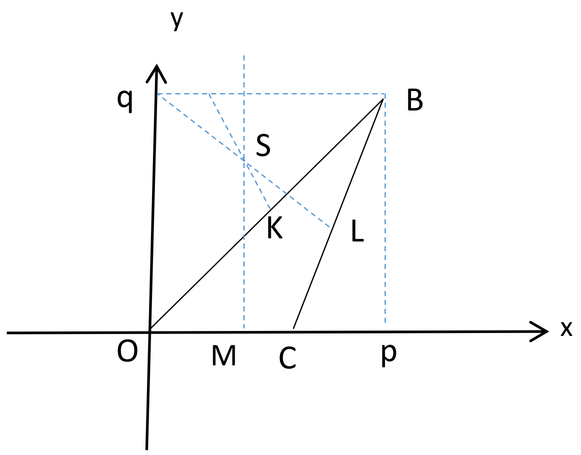

Рис. 8.

Середины сторон *OB; BC; OC* расположены в точках $K(\frac{p}{2};\frac{q}{2})$, $L(\frac{c+p}{2};\frac{q}{2})$, $M(\frac{c}{2};0)$.

Так как угловой коэффициент прямой *OB* равен *q/p*, уравнение перпендикулярной к ней прямой *KS* можно записать в виде $y = -(p/q)x + m$. Подставив в это уравнение координаты точки *K:* $\frac{q}{2} = -\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{2} + m \Rightarrow m = \frac{p^2+q^2}{2q}$, получим уравнение *KS:* $y = -\frac{p}{q}x + \frac{p^2+q^2}{2q}$.

Прямая *MS*, перпендикулярная *OC*, описывается уравнением $x = c/2$.

Поэтому, прямые *KS* и *MS* пересекаются в точке $S(\frac{c}{2};\ \frac{p^2+q^2-pc}{2q})$.

Аналогичные выкладки позволяют убедиться в том, что и прямая проведенная через середину стороны *BC* и перпендикулярная ей, проходит через точку *S*.

Осталось убедиться в том, что точка S равноудалена от вершин треугольника OBC. Для этого достаточно провести прямые вычисления.

Итак:

$$|OS|^2 = (\frac{c}{2} - 0)^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q} - 0)^2;$$

$$|CS|^2 = (\frac{c}{2} - c)^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q} - 0)^2 = (\frac{c}{2})^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q})^2;$$

$$|BS|^2 = (\frac{c}{2} - p)^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q} - q)^2 = (\frac{c}{2})^2 - cp + p^2 + (\frac{p^2 - q^2 - pc}{2q})^2 =$$

$$= (\frac{c}{2})^2 + \frac{4q^2 p^2 - 4q^2 cp}{4q^2} + \frac{p^4 + q^4 + p^2 c^2 - 2p^2 q^2 - 2p^3 c + 2q^2 pc}{4q^2} =$$

$$= (\frac{c}{2})^2 + \frac{p^4 + q^4 + p^2 c^2 + 2p^2 q^2 - 2p^3 c - 2q^2 pc}{4q^2} = (\frac{c}{2})^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q})^2.$$

Утверждение доказано. То, что точка S равноудалена от вершин треугольника OBC, говорит о том, что она является центром окружности, на которой лежат вершины треугольника — центром описанной вокруг треугольника окружности, радиус которого равен $\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + (\frac{p^2 + q^2 - pc}{2q})^2}$.

7. Задача

Найти координаты центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC, с вершинами A(-3; 2), B(5; 3), C(3; -1).

Решение.

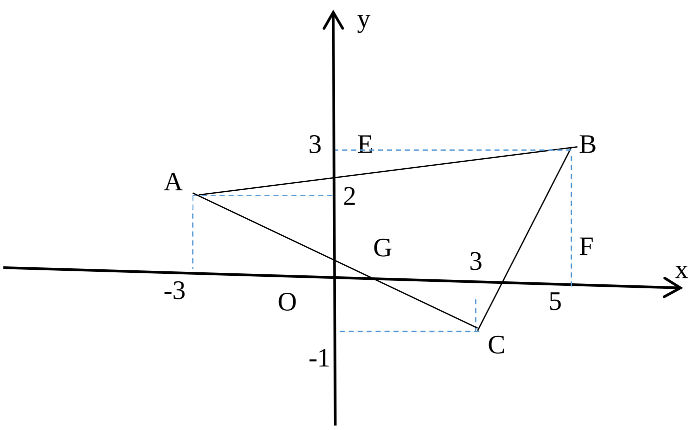

Рис. 9.

Середины сторон *AB; BC; AC* расположены в точках *E(1; 2,5), F(4; 1), G(0; 0,5),* а угловые коэффициенты: $k_{AB} = 1/8$; $k_{BC} = 2$; $k_{AC} = -1/2$.

Поэтому, прямая перпендикулярная к *AB* имеет уравнение *y = -8x + m*. Подставив в это уравнение координаты точки *E: 2,5 = -8·1 + m => m = 10,5*, получим уравнение *ES: y = -8x + 10,5*.

Точно также, уравнение прямой *FS*, перпендикулярной к *BC,* может быть записано в виде $y = –0,5x + m$. Использовав координаты точки *F*: $1 = –0,5 \cdot 4 + m => m = 3$, получим уравнение *FS:* $y = –0,5x + 3$.

Как было сказано ранее, пересечение прямых *ES* и *FS* определяет координаты центра окружности:

$$\begin{cases} y = -8x + 10{,}5, \\ y = -0{,}5x + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2{,}5. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что точка *S* – точка пересечения серединных перпендикуляров совпала с точкой *E* — серединой стороны *AB*. Это неслучайность. Полученный результат иллюстрирует известный факт: *центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы*. А прямоугольность треугольника *ABC* подтверждается тем, что угловые коэффициенты сторон *BC* и *AC* дважды взаимно обратны: $k_{BC} = 2$; $k_{AC} = –1/2$.

8. Настало время поговорить о биссектрисах треугольника. Все они, как и высоты и медианы, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник. Покажем это.

В треугольнике ABC проведем две биссектрисы AA_1 и BB_1, и обозначим точку их пересечения буквой *I*.

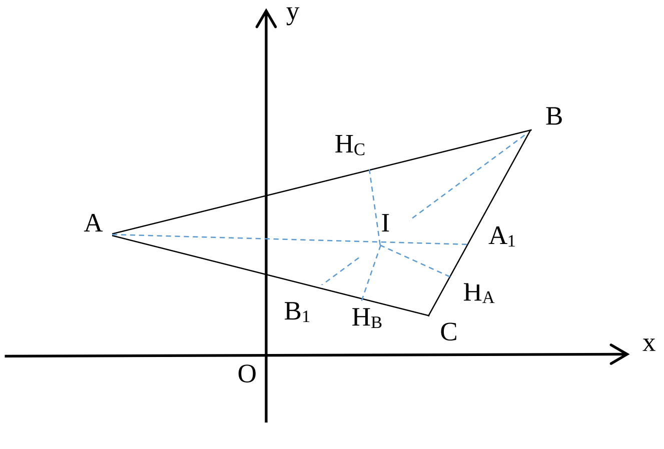

Рис. 10.

Известно, что любая точка биссектрисы находится на одинаковом расстоянии от сторон соответствующего угла. И, в частности, это относится к точке *I*. Покажем это.

Из точки *I* опустим перпендикуляры IH_C и IH_B к сторонам AB и AC и получим прямоугольные треугольники AIH_C и AIH_B. Они равны, так как имеют общую сторону и равные, прилежащие к ней углы. Поэтому стороны IH_C и IH_B равны между собой.

Точно также можно доказать, что равны между собой стороны IH_A и IH_C. Следовательно, равны между собой стороны IH_A и IH_B, то есть стороны *BC* и *AC* лежат на одинаковом расстоянии от точки *I*.

Отсюда следует, что точка *I* принадлежит биссектрисе CC_1, и, соответственно, что все биссектрисы пересекаются в одной точке.

Более того, установлено, что точка их пересечения *I* находится на одинаковом расстоянии от всех сторон треугольника – является центром окружности вписанной в треугольник *ABC*.

9. Теперь мы готовы получить формулу, связывающую координаты вершин треугольника $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$ с координатами точки пересечения биссектрис.

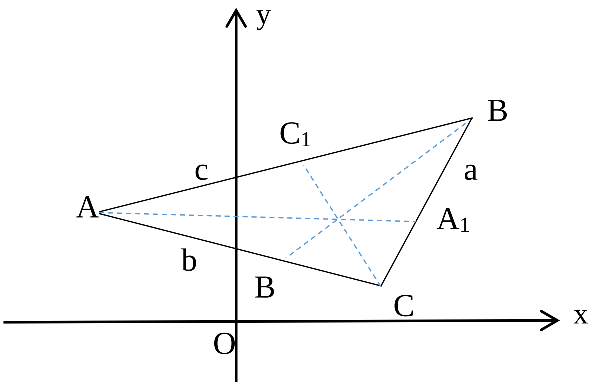

Рис. 11.

Обозначим через *a, b* и *c* длины сторон *BC, AC* и *AB*, соответственно, и воспользуемся свойством: *Биссектрисаугла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ним сторонам треугольника.* То есть

$$\frac{x_{A1}-x_B}{x_C-x_{A1}}=\frac{c}{b}\Rightarrow\begin{cases}x_{A1}=\dfrac{cx_C+bx_B}{c+b};\\ y_{A1}=\dfrac{cy_C+by_B}{c+b}.\end{cases}$$

Поэтому, угловой коэффициент уравнения биссектрисы AA_1 равен

$$\left(\frac{cy_C+by_B}{c+b}-y_A\right)/\left(\frac{cx_C+bx_B}{c+b}-x_A\right)=\frac{c(y_C-y_A)+b(y_B-y_A)}{c+b}/\frac{c(x_C-x_A)+b(x_B-x_A)}{c+b}=$$
$$=\frac{c(y_C-y_A)+b(y_B-y_A)}{c(x_C-x_A)+b(x_B-x_A)}.$$

Таким образом, уравнение прямой AA_1:

$$y-y_A=\frac{c(y_C-y_A)+b(y_B-y_A)}{c(x_C-x_A)+b(x_B-x_A)}(x-x_A).$$

Подобные рассуждения позволяют получить уравнение прямой BB_1:

$$y-y_B=\frac{c(y_C-y_B)+a(y_A-y_B)}{c(x_C-x_B)+a(x_A-x_B)}(x-x_B).$$

Как было показано ранее, точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 является точкой пересечения всех биссектрис треугольника *ABC*:

$$\begin{cases} y - y_A = \dfrac{c(y_C - y_A) + b(y_B - y_A)}{c(x_C - x_A) + b(x_B - x_A)}(x - x_A), \\ y - y_B = \dfrac{c(y_C - y_B) + a(y_A - y_B)}{c(x_C - x_B) + a(x_A - x_B)}(x - x_B), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \\ y = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}. \end{cases}$$

Таким образом показано, что <u>точка пересечения биссектрис</u> треугольника с вершинами $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$ (центр вписанной окружности) имеет координаты:

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c};\ \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right), \text{ где } a = |BC|,\ b = |AC|,\ c = |AB|.$$

10. Многие геометрические задачи решаются проще при использовании координат. Одним из ярких примеров подобного рода является задача определения площади треугольника.

Итак, имеется треугольник с вершинами в точках $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$.

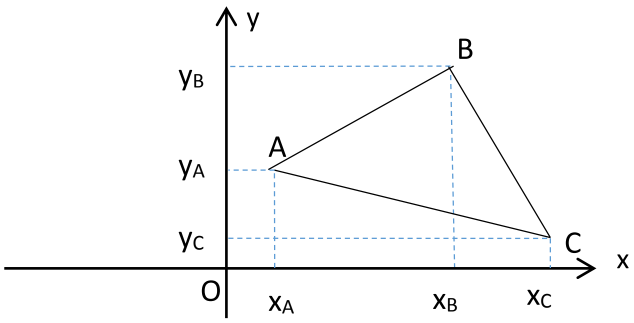

Рис. 12.

Площадь треугольника ABC равна разности между площадью трапеции y_BBCy_C и суммой площадей трапеций y_BBAy_A и y_AACy_C.

При этом, площадь трапеции y_BBCy_C равна $\dfrac{x_B + x_C}{2}(y_B - y_C)$;

площадь трапеции y_BBAy_A равна $\dfrac{x_B + x_A}{2}(y_B - y_A)$;

площадь трапеции y_AACy_C равна $\dfrac{x_A + x_C}{2}(y_A - y_C)$.

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{x_B + x_C}{2}(y_B - y_C) - \frac{x_B + x_A}{2}(y_B - y_A) - \frac{x_A + x_C}{2}(y_A - y_C) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_C + x_C y_B - x_C y_C) - \frac{1}{2}(x_B y_B - x_B y_A + x_A y_B - x_A y_A) -$$

$$- \frac{1}{2}(x_A y_A - x_A y_C + x_C y_A - x_C y_C) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x_B y_C - x_C y_B) + \frac{1}{2}(x_A y_C - x_C y_A) - \frac{1}{2}(x_A y_B - x_B y_A).$$

Обратим внимание на то, что выражения в трех последних круглых скобках можно записать в виде определителей второго порядка, которые затем можно собрать в определитель третьего порядка:

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2}(1\cdot\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}) = -\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}.$$

Отметим, что при ином расположении вершин треугольника может измениться знак определителя. Но это не повод для беспокойства: нужно взять половину абсолютного значения (модуля) величины соответствующего определителя.

Итак, доказано, что площадь треугольника с вершинами в точках

$A(x_A;\ y_A),\ B(x_B;\ y_B),\ C(x_C;\ y_C)$ можно вычислить по формуле

$$S = |0{,}5 detT|, \text{ где } detT = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}.$$

Литература:

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 2005. - 496 с.
2. Веселов А.П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. - СПб.: Лань, 2003. - 160 с.
3. www.math24.ru/двумерная-система-координат.html.
4. Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж Один раз отрежь, семь раз измерь. / Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана», №3. - Бишкек, 2018. - С. 3-6.

Рецензент: д.э.н., профессор Лукашова И.В.