DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Чекеев А.А., Касымова А.Б., Торобаев А.Т.

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТИН ЭРКИН ТОПОЛОГИКАЛЫК ГРУППАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Чекеев А.А., Касымова А.Б., Торобаев А.Т.

О СВОБОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

A.A. Chekeev, A.B. Kasymova, A.T. Torobaev

ON THE FREE TOPOLOGICAL GROUP OF UNIFORM SPACE

УДК: 515.12

Бүгүнкү күндө тихоновдук мейкиндиктердин эркин топологиялык группалар теориясы абдан жакшы өнүктүрүлгөн [8], ошол эле учурда бир калыптуу мейкиндиктердин эркин топологиялык группалар теориясы жетишерлик түрдө изилденген эмес. Сунушталган макалада тихонов мейкиндигинин эркин топологиялык группасы (А.А. Марков [1]) жана бир калыптуу мейкиндиктин T.Nakayata [4] маанисиндеги жана E.C.Nummela [11] маанисиндеги эркин топологиялык группаларынын кыска пайда болуу тарыхы берилет. 1982-жылдан бери T.Nakayata [4] жана E.C.Nummela [11] маанисиндеги бир калыптуу мейкиндиктердин эркин топологиялык группаларынын катышы туралуу проблема турган. Сунушталган макалада бул проблема чечилет. Жыйынтыгында ар бир uX *бир калыптуу мейкиндиги үчүн топологиялык изоморфизмге карата жалгыз* $F(X)$ *топологиялык группасы жашап, анын сол, оң жана эки жактуу бир калыптуулуктары* X *-ке баштапкы* u *бир калыптуулугун жаратат жана* $F(X)$*- деги группалык топологиясы эң күчтүү группалык топология болот.*

Негизги сөздөр: *группа, эркин группа, топологиялык группа, эркин топологиялык группа, бир калыптуулук, группалык бир калыптуулук, гомоморфизм, үзгүлтүксүз гомоморфизм.*

Теория свободных топологических групп тихоновских пространств на сегодняшний день очень хорошо развита [8], в то же время теория свободных топологических групп равномерных пространств недостаточно исследована. В данной статье кратко дается история возникновения понятий свободной топологической группы тихоновского пространства (А.А. Марков [1]) и свободных топологических групп равномерного пространства в смысле T.Nakayata [4] и в смысле E.C. Nummela [11]. С 1982 года стояла проблема о соотношениях свободных топологических групп равномерных пространств в смысле T. Nakayata [4] и E.C. Nummela [11]. В данной статье эта проблем решается. Оказалось, что для любого равномерного пространства uX *существует единственная, с точностью до топологического изоморфизма топологическая группа* $F(X)$*, что ее левая, правая и двусторонняя равномерности индуцируют на* X *исходную равномерность и групповая топология на* $F(X)$ *является сильнейшей групповой топологией.*

Ключевые слова: *группа, свободная группа, топологическая группа, свободная топологическая группа, равномерность, групповая равномерность, гомоморфизм, непрерывный гомоморфизм.*

This paper briefly describes the history of emergence of the concepts of a free topological group of Tychonoff space (A. Markov [1]) and free topological groups of a uniform space in sense of T.Nakayama [4] and in the sense of E.C.Nummela [11]. Since 1982 there has been a problem about the relations of free topological groups of uniform spaces in the sense of T.Nakayama [4] and E.C. Nummela [11]. We offer a solution for this problem. It turned out that for any uniform space uX *there exists a unique topological group* $F(X)$*, up to a topological isomorphism, that its left, right and two-sided uniformities induce on* X *the original uniformity* u *and the group topology on* $F(X)$ *is the strongest group topology.*

Key words: *group, free group, topological group, free topological group, uniformity, group uniformity, homomorphism, continuous homomorphism.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

1. Введение и предварительные сведения. Свободная топологическая группа тихоновского пространства определена А.А. Марковым [1] в 1941 для решения проблемы Л.С. Понтрягина [12] о нормальности всякой отделимой топологической группы. Свободная топологическая группа тихоновского не нормального пространства явилась примером отделимой топологической группы пространство, которой не нормально. Это явилось изящным контрпримером на проблему Л.С. Понтрягина. В работе [1] были даны краткие доказательства существования и единственности свободной топологической группы тихоновского пространства. Подробное доказательство существования и единственности было дано в работе [2] только в 1945 году. Другими способами теорема существования и единственности доказана в работах S. Kakutani [3], T. Nakayama [4] и М.И. Граева [5]. T. Nakayama в работе [4] определил свободную топологическую группу равномерного пространства. Гораздо позже E.C.Nummela [11] предложил другой подход к определению свободной топологической группы равномерного пространства. Напомним эти подходы.

Всюду рассматриваются тихоновские пространства и отделимые топологические группы, основная информация о равномерных пространствах берется из книг [6], [7] о топологических группах из книг [8], [9], [10]. Для любой топологический группы G через $\mathcal{N}(e)$ обозначается база всех окрестностей нейтрального элемента $e \in G$. Известно [9], что система покрытий $\{\{xV : x \in G\} : V \in \mathcal{N}(e)\}$, $\{\{xV : x \in G\} : V \in \mathcal{N}(e)\}$, $\{\{xV \cap Vx : x \in G\} : V \in \mathcal{N}(e)\}$ образует базы левой $\mathcal{U}_l$, правой $\mathcal{U}_r$, двусторонней $\mathcal{U}_t$ равномерностей, соответственно. Равномерные системы окрестностей на группах и на других алгебраических объектах, порожденных равномерными пространствами, исследовались в работах [14,15,16].

В дальнейшем произвольную топологическую группу G наделённую левой $\mathcal{U}_l$, правой $\mathcal{U}_r$ и двусторонней $\mathcal{U}_t$ равномерностями будем обозначать через ${}^*G$, G^* и ${}^*G^*$, соответственно.

Определение 1.1 (T.Nakayama [4]). Топологическая группа $F(X)$ называется *свободной топологической группой* равномерного пространства uX если:

1. uX равномерно гомеоморфно вложено в $F(X)$ при вложении $i : uX \to F(X)$, где $F(X)$ наделено левой равномерностью и $i(X)$ алгебраически порождает $F(X)$;

2. для каждого равномерного непрерывного отображения $f : uX \to {}^*G$ в топологическую группу G, наделенную левой равномерностью $\mathcal{U}_l$ существует такой непрерывный гомоморфизм $\overline{f} : F(X) \to G$, что $\overline{f} \circ i = f$.

Теорема 1.2 (T.Nakayama [4]). *Для любого равномерного пространства* uX *на алгебраической свободной группе* $F(X)$ *множества* X *существует такая сильнейшая групповая топология, что любое равномерно непрерывное отображение* $f : uX \to G^*$ *продолжается до непрерывного гомоморфизма* $\overline{f} : F(X) \to G$ *так, что* $\overline{f}|_X = f$. *Группа* $F(X)$ *наделённая этой топологией единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

Определение 1.3 (E.C.Nummela [11]). Топологическая группа $F(X)$ называется *свободной топологической группой* равномерного пространства uX, если:

1. uX равномерно гомеоморфно вложено в $F(X)$ при вложении $i : uX \to F(X)$, где $F(X)$ наделено двусторонней равномерностью и $i(X)$ алгебраически порождает $F(X)$;

2. Для каждого равномерно непрерывного отображения $f : uX \to {}^*G^*$ в топологическую группу G, наделённую двусторонней равномерностью $\mathcal{U}_t$, существует такой равномерный гомоморфизм $F(f) : F(X) \to G$, что $F(f) \circ i = f$.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Теорема 1.4 (E.C.Nummela [11]). *Для любого равномерного пространства uX на алгебраической свободной группе $F(X)$ множества X существует такая сильнейшая групповая топология, что любое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to {}^{*}G^{*}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{f} : F(X) \to G$ так, что $\bar{f}\big|_{X} = f$. Группа $F(X)$ наделённая этой топологией единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

Примечание 1.5. Отметим, что доказательство теоремы 1.2. и теоремы 1.4. даны ссылаясь на методы разработанные в работе [12] для доказательства существования и единственности свободной топологической группы тихоновского пространства.

Со времени публикации работ [4], [11] до сих пор не ясно как соотносятся свободные топологические группы равномерных пространств в смысле Nakayama и в смысле Nummela. Таким образом возникает соответственная проблема:

Как соотносятся свободная топологическая группа равномерного пространства в смысле Nakayama и свободная топологическая группа равномерного пространства в смысле Nummela?

В данной статье полностью решается этот вопрос.

В дальнейшем нам понадобиться следующее предложение [13], доказательство которого мы опускаем.

Предложение 1.6. *Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ семейство топологических групп и $G = \prod_{i\in I} G_i$. Тогда ${}^{*}G = \prod_{i\in I} {}^{*}G_i, G^{*} = \prod_{i\in I} G^{*}, {}^{*}G^{*} = \prod_{i\in I} {}^{*}G^{*}$.*

Через $\aleph_0$ обозначается счетный кардинал, $\mathfrak{c}$-мощность континуума, $|X|$-мощность произвольного множества X, $\Delta_{f\in\mathrm{F}}$ F -диагональное произведение семейство отображений F , "$\circ$" - знак композиции отображений, $I = [0,1]$ - единичный отрезок, T -группа вращений единичной окружности.

2. Основные результаты.

Следующее определение обобщает определение 1.1. и 1.3.

Определение 2.1. Топологическая группа $F(X)$ называется *свободной топологической группой* или *свободной u -топологической группой* равномерного пространства uX если:

1. uX равномерно гомеоморфно вложено в $F(X)$ при вложении $i : uX \to F(X)$, где $F(X)$ наделено левой, правой или двусторонней равномерностями и $i(X)$ алгебраически порождает $F(X)$;

2. Любое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to {}^{*}G,$ $f : uX \to G^{*},$ $f : uX \to {}^{*}G^{*}$ в топологическую группу G наделенную левой U_l, правой U_r и двусторонней U_t равномерностями, существует такой непрерывный гомоморфизм $\bar{f} : F(X) \to G$, что $\bar{f} \circ i = f$.

Следующая теорема обобщает теоремы 1.2. и 1.3.

Теорема 2.2. *Для любого равномерного пространства uX на алгебраической свободной группе $F(X)$ множества X существует такая сильнейшая групповая топология, что любое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to {}^{*}G, f : uX \to G^{*}$ и $f : uX \to {}^{*}G^{*}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{f} : F(X) \to G$ так, что $\bar{f}\big|_{X} = f$. Группа $F(X)$ наделенная этой топологией единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

Доказательство. Положим $\tau = \max\{\mathfrak{c}, |X| \cdot \aleph_0\}$. Пусть f семейство всех равномерно непрерывных отображений $f : uX \to {}^{*}G_f^{*}$ в топологическую группу G_f, удовлетворяющую $|G_f| \le \tau$.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Так как левая и правая равномерности содержатся в двусторонней, то $f : uX \to {}^{*}G,\ f : uX \to G^{*}$ также равномерно непрерывно для всех $f \in \mathrm{F}$. Коммутативная группа T содержит равномерно гомеоморфный образ I следовательно множество $U(uX, I)$ всех равномерно непрерывных отображений $f : uX \to I$ содержатся в F. Следовательно F разделяет точки замкнутые множества в X, т.е. F порождает топологию равномерного пространства uX. Также семейство F содержит семейство F' всех равномерно непрерывных отображений в топологические группы с инвариантной базой такое, что $|G_f| \le |X| \cdot \aleph_0$ и $\Delta_{f \in \mathrm{F}'} \mathrm{F}' : uX \to \prod_{f \in \mathrm{F}'} G_f$: равномерно гомеоморфное вложение [Граев]. Таким образом F порождает равномерность u на X. Диагональное произведение $\sigma = \Delta_{f \in \mathrm{F}} \mathrm{F} : uX \to \prod_{f \in \mathrm{F}'} G_f$: равномерно гомеоморфно вкладывает равномерные пространство uX в произведения $\prod_{f \in \mathrm{F}} {}^{*}G_f$:, $\prod_{f \in \mathrm{F}} G_f^{\cdot}$:, $\prod_{f \in \mathrm{F}} {}^{*}G_f^{*}$:. Пусть $F(X)$ подгруппа произведения $\prod_{f \in \mathrm{F}} G_f$:алгебраически порожденная $\sigma(X)$.

Пусть $f : uX \to {}^{*}G^{*}$ произвольное равномерно непрерывное отображение в произвольную топологическую группу G (отметим что в этом случае $f : uX \to {}^{*}G$ и $f : uX \to G^{*}$ также равномерно непрерывны). Пусть G_f :подгруппа G алгебраически порожденная $f(X)$. Тогда $|G_f| \le |X| \cdot \aleph_0 \le \tau$, т.е. $f \in \mathrm{F}$. Тогда имеем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} uX \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & F(X) \subset \prod_{f \in \mathrm{F}} G_f \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[d, shift left=8ex, "\pi_f"] \\ & G_f \end{tikzcd}$$

$\pi_f : \prod_{f \in \mathrm{F}} G_f \mapsto G_f$-естественная проекция, которая равномерно непрерывна относительно всех трех групповых равномерностей на произведении $\prod_{f \in \mathrm{F}} G_f$:(см. предложение 1.6.). Тогда $\overline{f} = \pi_f\big|_{F(X)} : F(X) \to G_f \subset G$ - искомый непрерывный гомоморфизм и $\overline{f}\big|_X = X$.

Если θ построенная топология на группе $F(X)$, а θ' другая топология на группе $F(X)$ удовлетворяющая условию теоремы, тогда $i : uX \to (F(X), \theta')$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\overline{i} : (F(X), \theta) \to (F(X), \theta')$, т.е. $\theta' \subset \theta$. Таким образом θ сильнейшая групповая равномерность удовлетворяющая условию теоремы.

Единственность доказывается аналогично теореме 7.1.1. [8].

Следствие 2.3. *Левая, правая и двусторонняя равномерности свободной u-топологической группы $F(X)$ равномерного пространства uX индуцирует на X равномерность u.*

Доказательство следует непосредственно из доказательства теоремы 2.2.

Следствие 2.4. (Лемма 7.7.1 [8]). *Левая, а следовательно правая и двустороняя, равномерность свободной топологической группы $F(X)$ индуцирует на X универсальную равномерность u_f.*

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 2.2, так как всякое непрерывное отображение на пространстве X равномерно непрерывно относительно универсальной равномерности u_f ([6],[7]).

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Литература:

1. Марков А.А. О свободных топологических группах. Доклад Академии Наук СССР, №31. - 1941. - С. 299-301.
2. Марков А.А. О свободных топологических группах. Доклад Академии Наук СССР, №9. - 1945. - С. 3-64.
3. Kakutani, S. Free topological groups and direct product of topological groups, Proc. Imp.Acad. Tokyo 40, 1944. - PP. 595-598.
4. Nakayama, T. Note on free topological groups, Proc.Imp.Acad.Sci.19, 1943. - PP. 471-475.
5. Граев, М.И. Свободные топологические группы, Доклад Академии Наук СССР. Сер. Мат. №12. - 1948. - С. 279-323.
6. Isbell, J. R. Uniform spaces: Mathematical Survey, Providence, 1964. - 175p.
7. R. Engelking, General Topology, Berlin: Heldermann, 1989. - 626 p.
8. Arhangel'skii A., Tkachenko M. Topological groups and related structures, Atlantis press, Word Scientific, Amsterdam-Paris, 2008. - 781 p.
9. Бурбаки Н. Общая топология Топологические группы. - Москва: Наука, 1969. - С. 392.
10. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах. - Бишкек 1997. - С. 268.
11. Nummela E.C. Uniform free topological groups and Samuel compactifications Topol. Appl. 13. - 1982. - PP.77-83.
12. Pontryagin L.S. The theory of topological commutative groups, Ann. Math. 35. - 1934. - PP. 361-388.
13. Reolcke W., Dierolf S. Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill Int. book Co. - New York, 1981. - 276 p.
14. Чекеев А.А., Касымова Т.Дж., Ташбаева Э.А., Равномерные системы окрестностей. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №1. - Бишкек, 2013. - С. 76-78.
15. Рахманкулов Б.З., Волмэновская компактификация и алгебра функций на равномерных пространствах. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №7. - Бишкек, 2016. - С. 12-17.
16. Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б., Конуль псевдокомпактные пространства. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №4. - Бишкек, 2017. - С. 12-14.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымова Т.Дж.